

8 145

1.30

Ausführliches Lehrbuch
der
ebenen und sphärischen
Trigonometrie.

Zum
Selbstunterricht
mit Rücksicht auf die Zwecke des praetischen Lebens

bearbeitet

von

H. B. Lübsen.

Mit 58 Figuren im Text.

Sechste verbesserte Auflage.

Leipzig:

Friedrich Brandstetter.

1867.

OS 98(6)

526. Li 145

Ausführliches Lehrbuch

der

ebenen und sphärischen

Trigonometrie.

Zum

Selbstunterricht

mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens

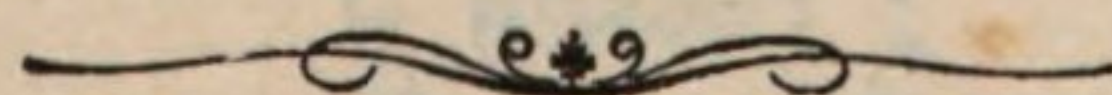
bearbeitet

von

H. B. Lübsen.

Mit 58 Figuren im Text.

Sechste verbesserte Auflage.



Leipzig:

Friedrich Brandstetter.

1867.

OS 98(6)

n.v.

Uebersetzungsrecht vorbehalten

131560530



Vorwort zur ersten Auflage.

Die hier gewählte Darstellung der Trigonometrie weicht von der gewöhnlichen, welche nicht allein die ganze Gonio-
metrie voraufschiebt, sondern auch die trigonometrischen Func-
tionen als Linien darstellt, in mehr als einer Hinsicht ab. Eine
fünfundzwanzigjährige Erfahrung aber hat mich überzeugt, dass
auf die hier befolgte Weise der Schüler nicht allein leichter,
sondern auch rascher vorwärts kömmt.

Hamburg, den 16. December 1851.

Lübsen.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Diese neue Auflage hat ein paar Zusätze erhalten, ohne
deshalb die Zahl der Paragraphen zu ändern.

Hamburg, im October 1856.

Lübsen.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die hier vorliegende Darstellung der Thesen der
von der Gesellschaft, welche unter der Leitung des
Herrn v. Schlegel, seitdem auch der vormaligen
Präsidenten der Gesellschaft, in mehr als vierzig Jahren
ihre Thesen der Öffentlichkeit übergeben hat, ist nicht
auf die hier vorliegende Thesen der Gesellschaft
beschränkt, sondern auch auf die Thesen der
Gesellschaft der Thesen der Gesellschaft.

Hamburg, den 18. September 1851.

Lübeck.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die hier vorliegende Darstellung der Thesen der
Gesellschaft der Thesen der Gesellschaft, welche
unter der Leitung des Herrn v. Schlegel, seitdem
auch der vormaligen Präsidenten der Gesellschaft,
ihre Thesen der Öffentlichkeit übergeben hat, ist
nicht auf die hier vorliegende Thesen der
Gesellschaft beschränkt, sondern auch auf die
Thesen der Gesellschaft der Thesen der
Gesellschaft.

Hamburg, im October 1856.

Lübeck.

Erster Theil.

Ebene Trigonometrie.

Einleitung.

Die Elementar-Geometrie lehrt schon, dass unter allen räumlichen Grössen das einfache Dreieck insofern sich am wichtigsten zeigt, als es gleichsam ein Schlüssel ist, durch dessen Vermittelung wir zur Kenntniss der meisten übrigen Figuren gelangen. Kreis und Dreieck sind höchst verschiedene Gestalten, aber nur durch Hülfe des Dreiecks konnten wir die vielen merkwürdigen Eigenschaften des Kreises entdecken, seinen Umfang und seinen Inhalt finden. Dasselbe gilt von vielen andern räumlichen Grössen, Kegel, Kugel etc. Nicht allein die reine Geometrie kommt auf das einfache Dreieck zurück, sondern fast auch die ganze practische Geometrie, mithin ganze, für das bürgerliche Leben wichtige und unentbehrliche Wissenschaften. Geodäsie (Geographie, Land- und Seekarten), Schiff-fahrtskunde, Astronomie, Mechanik, Optik, etc. konnten erst in neuerer Zeit durch eine vervollkommnete Theorie des Dreiecks (Trigonometrie) fest begründet, practisch sicher und fruchtbar gemacht werden. Aus diesen Gründen ist die vollständige Theorie des Dreiecks (Trigonometrie) von so grosser Wichtigkeit für die Wissenschaft selbst und für das practische Leben, und man kann behaupten, einer der wichtigsten Theile der gesammten Mathematik, und deshalb ein gründliches Studium derselben die darauf verwandte Zeit und Mühe reichlich lohnend.

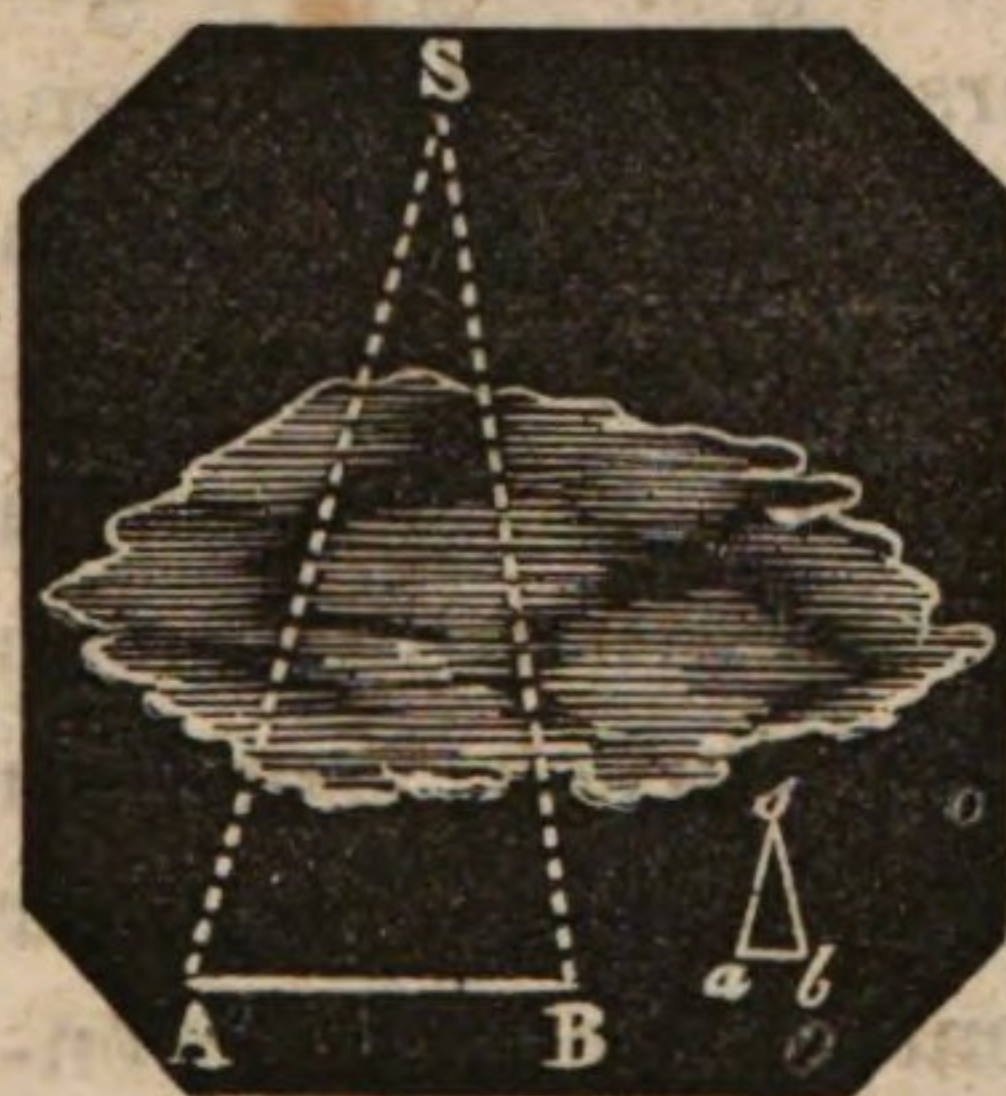
Aus der Elementar-Geometrie wissen wir, durch welche von den sechs Bestandtheilen eines Dreiecks (drei Seiten und drei Winkel) die übrigen bestimmt sind, mithin das ganze Dreieck vollkommen bestimmt ist, nämlich durch:

1. Zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel.
2. Eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.
3. Alle drei Seiten.
4. Zwei Seiten und einen der grössern Seite gegenüber liegenden Winkel.

Auch lehrt die Geometrie das Verfahren, wenn irgend drei dieser Bestimmungsstücke der Grösse nach gegeben sind, die dadurch bestimmte Grösse der übrigen drei Stücke durch Construirung des ganzen Dreiecks zu finden.

In rein theoretischer Hinsicht lässt sich gegen die Richtigkeit dieses zeichnenden Verfahrens auch nichts einwenden, in practischer Hinsicht aber, wo möglichste Genauigkeit gefordert wird, ist dieses Verfahren, wegen Unzulänglichkeit unserer Sinne und Unvollkommenheit der beim Construiren gebrauchten Werkzeuge, höchst selten zuverlässig und genügend, oft auch ganz unausführbar.

Um dieses einleuchtend zu machen, bedarf es nur eines Beispiels aus der Geodäsie.



Angenommen: es solle die Entfernung eines Punctes, S, von einem Puncte, A, bestimmt werden. Ist die Entfernung wegen eines zwischenliegenden Hindernisses nicht unmittelbar zu messen, so muss es durch Hülfe eines erst zu bildenden Dreiecks geschehen.

Es werde deshalb eine beliebig grosse sogenannte Standlinie, AB, unmittelbar und möglichst genau gemessen, ebenso die beiden Winkel A und B an derselben, mittelst eines bis auf die Secunde genau messenden Winkelmessers,

z. B. $AB = 800 \text{ Fuss}$, $\hat{A} = 78^\circ 14' 36''$; $\hat{B} = 85^\circ 20' 17''$.

Wollte man nun aus diesen in Zahlen gegebenen Grössen die fragliche Länge der Linie AS durch Zeichnung finden, so müsste man erst ein ähnliches Dreieck construiren, und also nach

einem verjüngten Massstabe eine Linie, $ab=800'$, auf einem Zeichnenbrette abstecken und hieran die Winkel $a=A$, $b=B$ zeichnen. So gross dann die Linie as , nach demselben verjüngten Massstabe gemessen, ist, so gross müsste AS in der Wirklichkeit sein, wenn das mit ABS ähnliche Dreieck abs vollkommen genau gezeichnet wäre. Diese Genauigkeit ist aber durch Zeichnung schon deshalb nicht möglich, weil sich die, bis auf die Secunde genau gemessenen Winkel nicht so genau wieder zeichnen lassen. Ein paar Minuten grösser oder kleiner könnte aber, namentlich wenn die Summe der beiden Winkel A, B nahe an 180° käme, einen Fehler verursachen, wodurch die Länge von as , also auch AS um mehr als die Hälfte zu gross oder zu klein ausfiele, abgesehen von der grossen Unständlichkeit dieses zeichnenden Verfahrens, und dass ausserdem der Durchschnittspunct s eine so grosse Entfernung von a und b haben könnte, dass die Linien as, bs fast parallel liefen, auf dem Zeichnenbrette, und wenn es auch die Grösse einer Provinz hätte, gar nicht zum Durchschnitt kämen, und deshalb gar keine Zeichnung möglich wäre. Eben so ungenaue Resultate würde das Constructionsverfahren geben, wenn man darnach aus den drei in Zahlen gegebenen Seiten eines Dreiecks die Grössen der dadurch bestimmten Winkel in Zahlen genau finden wollte.

Diese Beispiele, deren wir nicht nur aus der Geodäsie, sondern auch aus andern Theilen der angewandten Mathematik noch viele anführen könnten, wo man nämlich aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten mit möglichster Genauigkeit finden soll, zeigen deutlich, dass dies, aus angeführten Gründen, durch geometrische Constructionen durchaus unmöglich ist, und dass wir in allen solchen Fällen auf genaue und sichere Praxis entweder ganz verzichten, oder noch ein anderes, von unsern Sinnen und Werkzeugen unabhängiges Verfahren erfinden, kurzum, die Theorie des Dreiecks erst noch vervollkommen müssen, und es fragt sich nun, ob und wie sich dieser wichtige Gedanke, den, wie wir eben angedeutet, nicht müssige Speculationen, sondern vielfache, rein practische Bedürfnisse hervorgerufen haben, verwirklichen lasse?

Der Einfall: Hülfe in der Arithmetik zu suchen, stellt sich hier von selbst ein. Denn, könnten wir allgemeine arithmetische Regeln finden, nach welchen man aus den in Zahlen gegebenen

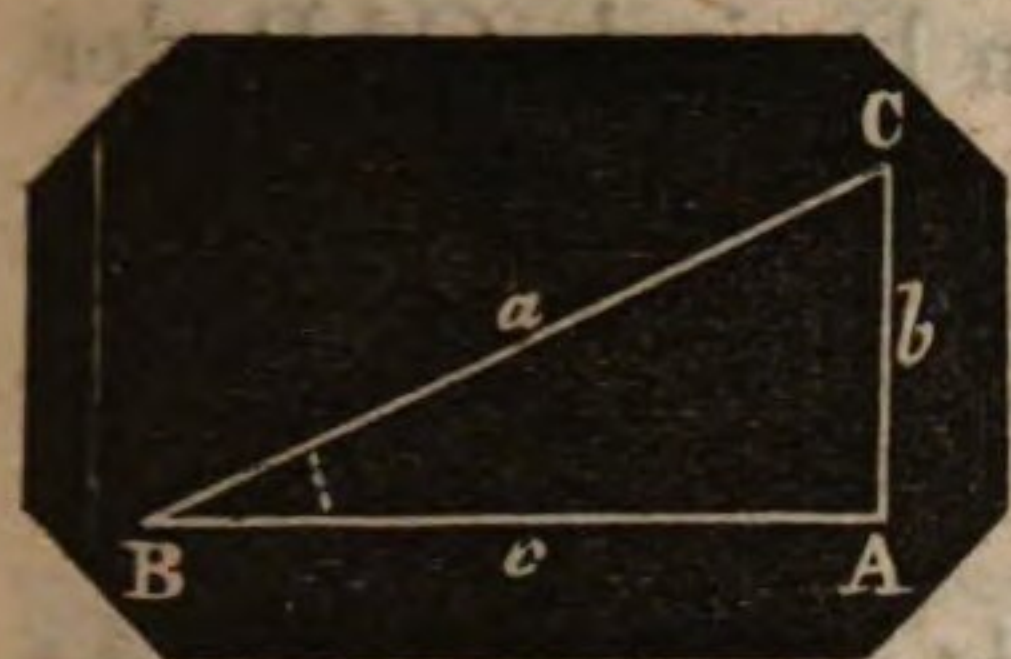
Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten Stücke berechnen könnte, so wäre damit jener Gedanke offenbar verwirklicht, weil alle durch Rechnung erhaltenen Resultate reines Product des Geistes, mithin von der Unzulänglichkeit unserer Sinne ganz unabhängig, also vollkommen genau und zuverlässig sind, wie es die Arithmetik selbst ist.

Dass solche allgemeine arithmetische Regeln existiren müssen, lässt sich wenigstens muthmassen. Auch sind diese Regeln, obwohl die Wissenschaft, zu ihrem eigenen und zum grossen Nachtheil der Praxis, wegen vernachlässigter Ausbildung der den Alten fast gänzlich unbekannten arithmetischen Wissenschaften, sehr lange darauf warten musste, in den letzten anderthalb hundert Jahren gefunden, und machen zusammen nun denjenigen Theil der Mathematik aus, welchem man den Titel Trigonometrie (Dreiecksrechnung) giebt.

Der Zweck und Begriff dieser jetzt zu bildenden Wissenschaft ist vorläufig nun wohl so deutlich ausgesprochen, dass der Anfänger, dadurch vorbereitet und angeregt, auf den Gang der Erfindung und Entwicklung gespannt sein wird.

Denn so leicht ist die Sache nicht. Und wer den unaufhaltsamen Fortschritt in den Wissenschaften mit Aufmerksamkeit betrachtet und wahrnimmt, auf welche sinnreiche Weise der menschliche Geist scheinbar unüberwindliche Schwierigkeiten zu beseitigen weiss, der wird auch hier das Verdienst Desjenigen anerkennen und dessen Scharfsinn bewundern, der als der erste Erfinder der Trigonometrie betrachtet werden muss. Auf welche sinnreiche Weise er zu Werke ging, wollen wir jetzt zeigen.

Durch die Ueberlegung, dass jedes Dreieck durch ein Perpendikel immer in zwei rechtwinklige zerlegt werden kann, und deshalb die ganze Trigonometrie auf die des einfachern rechtwinkligen Dreiecks zurückkommt, war die allgemeine Aufgabe vorläufig auf die weit einfachere gebracht: aus beliebigen in Zahlen gegebenen Bestimmungsstücken eines rechtwinkligen Dreiecks die übrigen Stücke desselben durch Rechnung zu finden; und es war ein sehr glücklicher, gleich auf die beste und bequemste Methode führender Gedanke, durch Herbeischaffung folgender Hülfsgrössen diese Aufgabe leicht zu lösen.



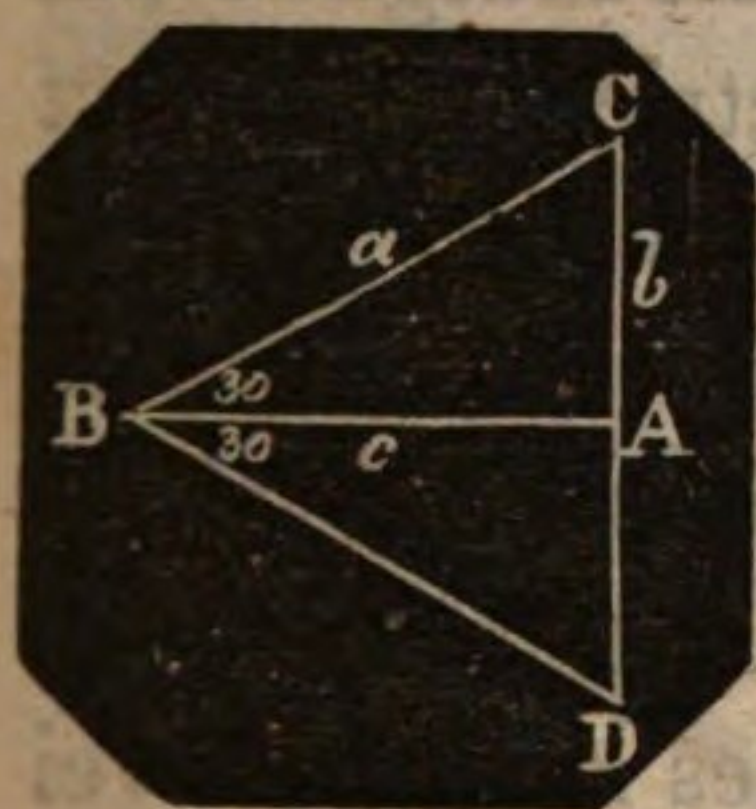
Man denke sich, sagte der erste Erfinder, auf dem einen Schenkel eines bestimmten Winkels, B, ein beliebiges Stück, BC, abgeschnitten und von dem Endpunct C ein Loth (Perpendikel), CA, auf den andern Schenkel gefällt, so entsteht

ein bei A rechtwinkliges Dreieck, dessen Seiten a , b , c heissen mögen. Denken wir uns die Längen dieser Seiten nach einer beliebigen Längeneinheit gemessen und durch Zahlen ausgedrückt, so ist klar, dass die Verhältnisse von je zwei dieser Seiten oder die unbenannten Quotienten, die je zwei Seiten durch einander dividirt geben (wie $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c^*}{b}$), durch die Grösse des Winkels B vollkommen bestimmt sind.

Wäre z. B. $\widehat{B} = 30^\circ$, so wäre:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}; \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \frac{c}{b} = \sqrt{3}.$$

Denn denkt man den Winkel $B = 30^\circ$ auch unterhalb BA angetragen und CA bis D verlängert, so ist BCD ein

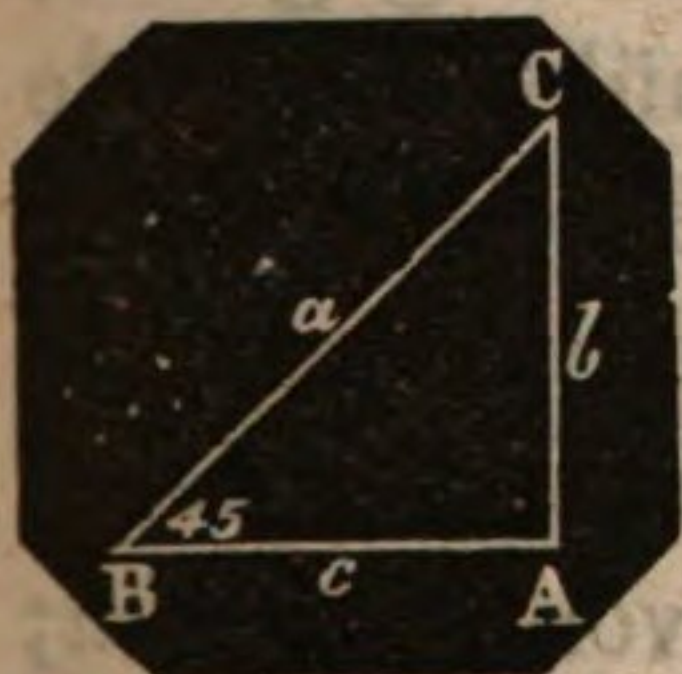


gleichseitiges Dreieck (weil jeder Winkel $= 60^\circ$), folglich $b = \frac{1}{2}a$; $c = \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, mithin

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}; \quad \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}; \quad \frac{b}{c} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \frac{c}{b} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3};$$

$$\frac{c}{b} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}.$$

Ferner ist auch klar, dass diese vier Quotienten nur von der Grösse des Winkels B, nicht aber von der absoluten Grösse der Seiten a , b , c abhängen; denn wird eine dieser Seiten, z. B. $BC = a$, 2, 3 $\dots n$ mal so gross genommen, so werden (vermöge Aehnlichkeit der Dreiecke) auch die beiden andern Seiten b und c in demselben Verhältnisse grösser, und die Quotienten bleiben deshalb für denselben Winkel noch dieselben. Mit dem Winkel aber ändern sich auch die Quotienten.



Wäre z. B. $\widehat{B} = 45^\circ$, so wären die erwähnten Quotienten:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \frac{b}{c} = 1, \quad \frac{c}{b} = 1.$$

*) Die beiden Quotienten $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$ sind überflüssig.

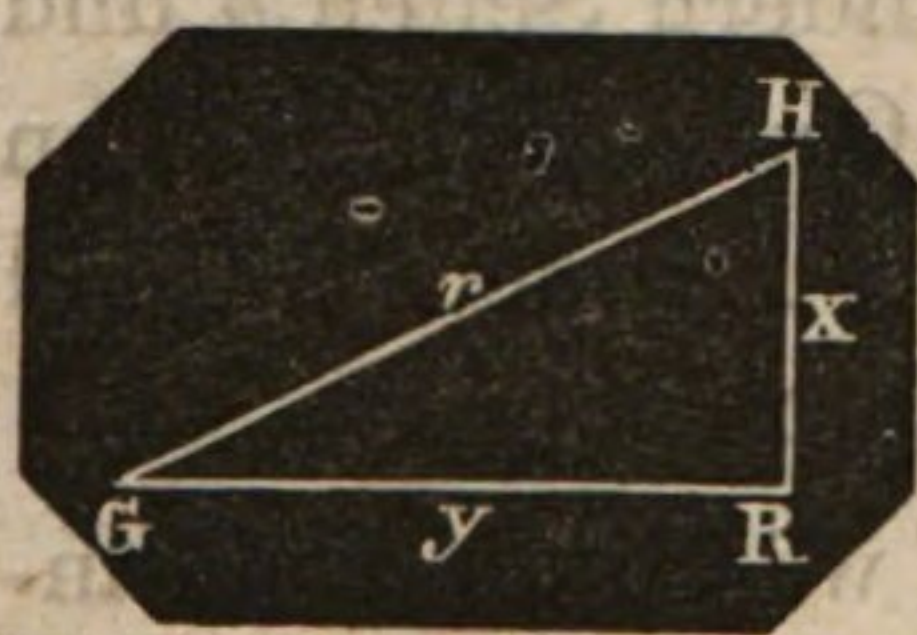
Denn wenn in dem bei A rechtwinkligen Dreieck CAB der Winkel $B=45^{\circ}$ ist, so ist auch $\widehat{C}=45^{\circ}$, und die beiden Lothe b und c sind einander gleich. Setzen wir die Länge dieser gleichen Catheten $=x$, so ist: $x^2 + x^2 = a^2$ oder $x^2 = \frac{1}{2}a^2$, mithin $x = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; folglich, wie oben, $\frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a} = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\frac{b}{c} = \frac{a\sqrt{\frac{1}{2}}}{a\sqrt{\frac{1}{2}}} = 1$ etc.

Könnte man nun diese vier Quotienten, wie hier für 30° und 45° , auch für jeden andern Zustand des Winkels B, von 0° bis 90° berechnen, und dann alle nebst den zugehörigen Winkeln in einer Tabelle leicht übersichtlich zusammenstellen, etwa so:

Winkel	Quotienten			
	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{c}{b}$
$0^{\circ} 0' 0''$	...	...	...	...
...	...	...	...	...
$30^{\circ} 0' 0''$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
$45^{\circ} 0' 0''$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	1
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

so leuchtet der grosse practische Nutzen einer solchen Tabelle leicht ein, und wir wollen zeigen, dass durch Anfertigung derselben die Aufgabe der Trigonometrieschon so gut wie gelöst wäre. Denn wären dann von einem rechtwinkligen Dreieck (und darauf kommt, wie gesagt, Alles zurück) zwei Bestimmungsstücke gegeben, so könnte man mit-

telst einer solchen vollständigen trigonometrischen Tafel die übrigen Stücke durch eine einfache Multiplication oder Division sehr leicht berechnen.



Wären z. B. in dem bei R rechtwinkligen Dreieck GHR der Winkel $G=30^{\circ}$, die Hypotenuse $GH=r=2530$ Fuss gegeben, und das dem Winkel G gegenüber liegende Loth $HR=x$, so wie auch das ihm anliegende $GR=y$ zu bestimmen verlangt, so

giebt offenbar x durch r dividirt denselben Quotienten, welcher in der ersten Spalte der Tafel neben dem Winkel von 30° steht;

daher $\frac{x}{2530} = \frac{1}{2}$, und hieraus durch eine leichte Multiplication

$x=1265$ Fuss. Ebenso ist der Quotient $\frac{y}{2530}$ für den Winkel $G=30^\circ$ vollkommen bestimmt. Sucht man diesen Quotienten neben dem Winkel von 30° in der zweiten Spalte, so ist $\frac{y}{2530}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $y=2530\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Einen gleichen Nutzen gewähren offenbar die beiden andern Spalten, wenn von einem rechtwinkligen Dreieck eine Cathete und ein spitzer Winkel gegeben sind; auch merkt man wohl schon, wie die Tafel (als vollständig vorausgesetzt) dienen kann, um in einem rechtwinkligen Dreieck die beiden spitzen Winkel zu bestimmen, wenn irgend zwei Seiten desselben gegeben sind.

Der grosse Nutzen einer solchen vollständigen Tafel ist aus dem Gesagten nun wohl einleuchtend, und der Erste, der den Gedanken an eine solche Tabelle fasste, muss als der eigentliche Erfinder der Trigonometrie betrachtet werden, denn alles Folgende, die ganze Trigonometrie, ist nur Bearbeitung und Ausführung dieses Gedankens, woran nun Viele Theil nehmen und ihren Scharfsinn zeigen konnten, und den die Zeit bald zur Reife bringen musste; denn eins folgt aus dem andern fast von selbst. Hier gilt wieder, was Descartes von den Fortschritten der Mathematik überhaupt sagt: „wenn man nur die zwei oder drei ersten Glieder erst hat, so ist es nicht schwer, auch die übrigen zu finden.“

Erstes Buch.

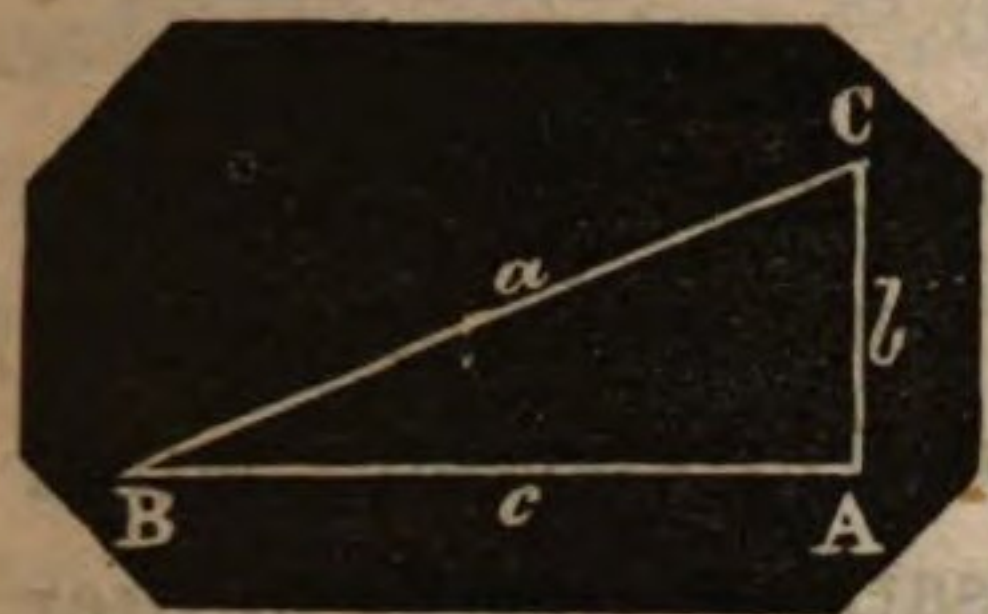
Benennung der trigonometrischen Functionen. Berechnung derselben. Grenzen, zwischen welchen sie enthalten. Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

Benennung der trigonometrischen Functionen.

1.

Die in der Einleitung erwähnten vier Quotienten: $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{b}$, welche in einem rechtwinkligen Dreieck, ABC, in Bezug auf einen der beiden spitzen Winkel, B, je zwei Seiten durch einander dividirt, geben, sind, wie wir gesehen haben, durch die Grösse des Winkels B vollkommen bestimmt, und also Functionen dieses Winkels (Algebra § 148). Man benennt sie deshalb auch, wegen ihrer Wichtigkeit für die Trigonometrie, mit dem gemeinschaftlichen Namen: trigonometrische Functionen. Da nun aber von diesen vier trigonometrischen Functionen bald die eine, bald die andere gebraucht wird, so ist es um Verwechselungen und Weitläufigkeiten im Vortrage zu vermeiden, offenbar nothwendig, jede mit einem eigenen Namen zu benennen. Diese Namen sind, wie alle Eigennamen, ursprünglich ganz willkürlich, und der Anfänger muss deshalb in den folgenden etwas seltsam klingenden Namen keinen verborgenen Sinn suchen wollen.

2.



Man nennt nämlich in jedem rechtwinkligen Dreieck, ABC, in Bezug auf einen der beiden spitzen Winkel, z. B. $\hat{B}$:

1. *sinus* des Winkels B (sprich kurz: *sinus* B): das ihm gegenüber liegende Loth durch die Hypotenuse dividirt. In Zeichen: $\sin B = \frac{b}{a}$.

2. *cosinus* des Winkels B: das ihm anliegende Loth durch die Hypotenuse dividirt. In Zeichen: $\cos B = \frac{c}{a}$.

3. *tangente* des Winkels B: das ihm gegenüber liegende Loth durch das anliegende dividirt. In Zeichen: $\tan B = \frac{b}{c}$.

4. *cotangente* des Winkels B: das ihm anliegende Loth durch das gegenüber liegende dividirt. In Zeichen: $\cot B = \frac{c}{b}$.

Diese vier Kunstwörter und ihre Bedeutung muss der Anfänger sich wohl merken, so wie auch, dass die trigonometrischen Functionen (*sinus*, *cosinus*, *tangente* und *cotangente*) abstracte Zahlen sind, und also das lateinische Wort *tangente* hier eine ganz andere Bedeutung hat, als in der Geometrie, wo es eine berührende Linie bedeutet.

Berechnung der trigonometrischen Functionen.

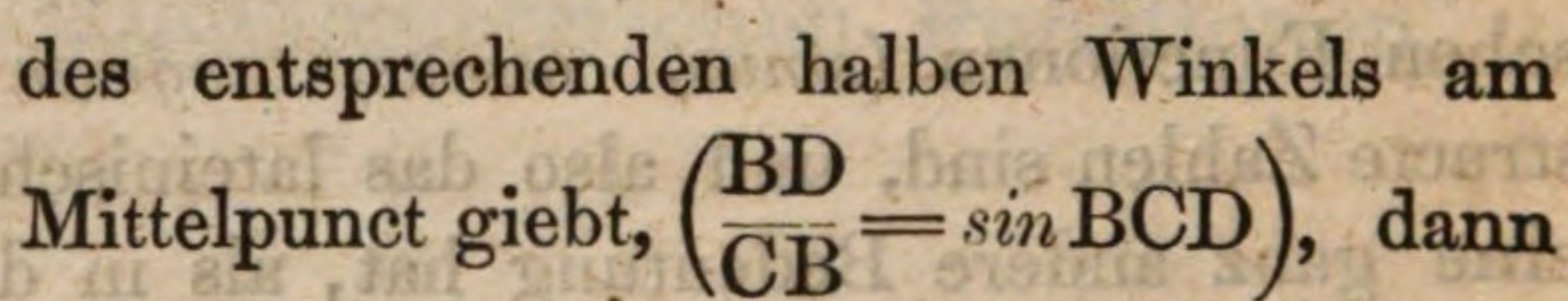
3.

Mit der ursprünglichen Berechnung der trigonometrischen Functionen verhält es sich, gleichnissweise, wie mit der ursprünglichen Berechnung der Logarithmen. Als man diese sehr mühsame Arbeit unternahm, waren die kurzen und leichten Methoden, welche die seitdem erfundene höhere Mathematik jetzt darbietet, noch nicht bekannt, und wir müssen uns deshalb auch, weil wir die höhere Mathematik hier nicht als bekannt voraussetzen dürfen, damit begnügen, an ein paar Beispielen die Möglichkeit der Berechnung nach dem ältern mühsamen Verfahren zu erklären. Die ersten Berechner der trigonometrischen Tabellen haben der Wissenschaft einen unschätzbaren Dienst geleistet, und wir

Die Möglichkeit, die trigonometrischen Functionen zu berechnen, erkannte der erste Erfinder darin: dass man die Seiten aller regelmässigen Vielecke, welche man construiren kann, auch bloss durch Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes, der sich hier in seiner grössten Wichtigkeit zeigt, zu berechnen im Stande ist.

2. *costum* des Winkels B: 4. *ihm* anliegenden Loh durch

Vielecksseite, wie z. B. BD, durch den
radius CB dividirt, nämlich: $\frac{BD}{CB}$, den *sinus*



dann die *tangente* und *cotangente* vom Winkel BCD, nämlich:

45°	30°	36°	12°
22° 30'	15°	18°	6°
11° 15'	7° 30'	9°	3°
5° 37' 30"	3° 45'	4° 30'	1° 30'
2° 48' 45"	1° 52' 30"	2° 15'	0° 45'

Wäre z. B. AB die Seite des regelmässigen Sechsecks, folglich $AB=CB$, so ist, wenn man der leichtern Rechnung halber,

den *radius* $CB = 1$ setzt*), $BD = \frac{1}{2}$, $\widehat{BCA} = 60^\circ$, $\widehat{BCD} = 30^\circ$, daher
 $\sin BCD = \frac{BD}{CB} = \frac{\frac{1}{2}}{1}$, oder $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$. Ferner $CD = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$,
 also: $\cos 30^\circ = \frac{CD}{CB} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; dann $tg 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ und
 $cot 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. Die vier trigonometrischen Functionen des
 Winkels von 30° sind also:

$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} = 0,5 & tg 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,5773502 \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,8660254 & cot 30^\circ &= \sqrt{3} = 1,7320508 \end{aligned}$$

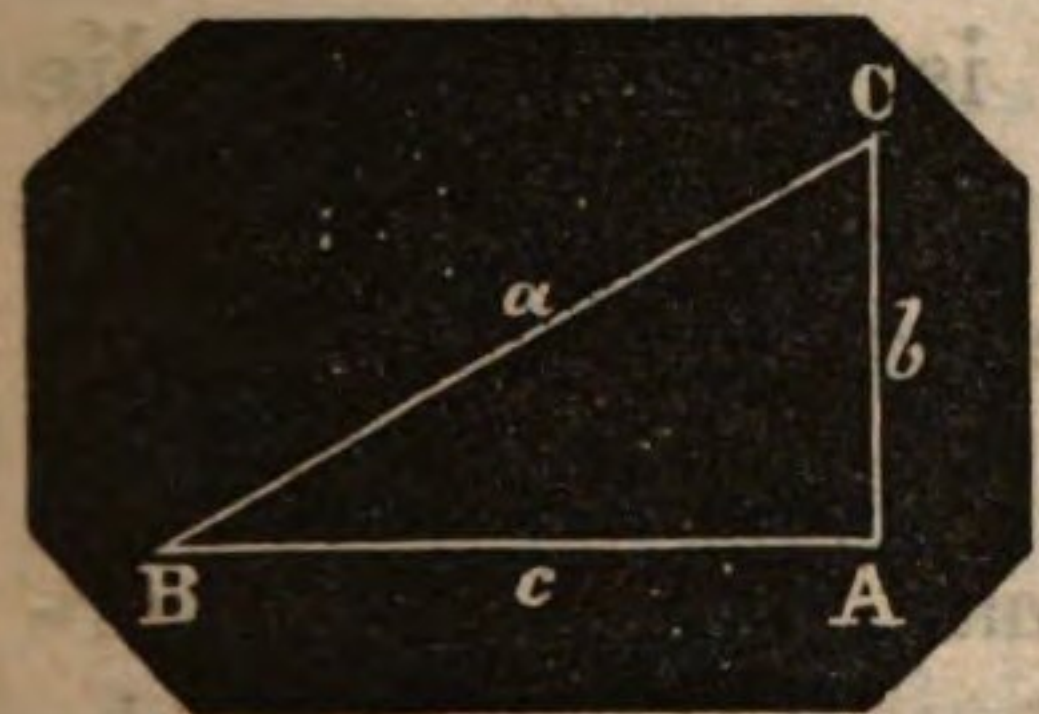
Ist AG die Seite des regelmässigen Vierecks, so hat man
 (CA wieder = 1 gesetzt): $AG = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, also, weil $\widehat{ACM} = \widehat{CAM} = 45^\circ$;
 $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $CM = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, daher:

$$\begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} & tg 45^\circ &= 1 \\ \cos 45^\circ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} & cot 45^\circ &= 1 \end{aligned}$$

Eben so könnte man für die übrigen angeführten unzähligen
 Winkel die entsprechenden trigonometrischen Functionen be-
 rechnen. Man sieht aber leicht, dass dennoch eine sehr grosse
 Lücke bleibt, und namentlich alle Winkel von 45° bis 90° fehlen.

5.

Aus der Erklärung der trigonometrischen Functionen folgt
 aber, und konnte auch vom ersten Erfinder nicht unbemerkt
 bleiben, dass in einem rechtwinkligen



Dreieck, ABC, irgend eine trigonometrische
 Function des einen spitzen Winkels, B,
 zugleich auch die sinnverwandte**) trigonometrische Function des andern spit-
 zen Winkels, C, ist. Der Quotient $\frac{b}{a}$

*) Nähme man den *radius* CB, r mal, z. B. 10 mal, grösser, so würden
 auch die Linien BD, CD eben so viel mal grösser, wobei aber die Quotienten
 $\frac{BD}{CB}$, $\frac{CD}{CB}$ etc, dieselben bleiben, als wenn man, der leichtern Rechnung
 halber, $CB = 1$ setzt, wo dann die halben Vielecksseiten BD, AM schon die
sinus, und die darauf gefällten Perpendikel CD, CM, die *cosinus* der ent-
 sprechenden Winkel BCD, ACM sind.

**) *sinus* und *cosinus* heissen sinnverwandt, ebenso *tangente* und *cotangente*.

z. B. ist der sinus vom Winkel B (nämlich das gegenüber liegende Loth durch die Hypotenuse dividirt, § 2), derselbe Quotient $\frac{b}{a}$ ist aber in Beziehung auf den andern spitzen Winkel C der *cosinus* vom Winkel C (nämlich das anliegende Loth durch die Hypotenuse dividirt). In Zeichen:

$$\sin B = \frac{b}{a} = \cos C \quad \quad \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \cot C$$

$$\cos B = \frac{c}{a} = \sin C \quad \quad \quad \cot B = \frac{c}{b} = \operatorname{tg} C$$

Wäre z. B. $B = 30^\circ$, mithin $C = 90 - 30 = 60^\circ$, so haben wir bereits gefunden (§ 4), dass:

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ \quad \quad \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = \cot 30^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ \quad \quad \quad \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} 30^\circ$$

Wäre $C = 80^\circ$, mithin $B = 10^\circ$, so wäre:

$$\sin 80^\circ = \cos(90^\circ - 80^\circ) = \cos 10^\circ \quad \text{und}$$

$$\cos 80^\circ = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \sin 10^\circ$$

Allgemein, wenn a einen beliebigen spitzen Winkel bedeutet:

$$\sin(90 - a) = \cos a \quad \quad \quad \operatorname{tg}(90 - a) = \cot a$$

$$\cos(90 - a) = \sin a \quad \quad \quad \cot(90 - a) = \operatorname{tg} a$$

6.

Durch vorhergehenden wichtigen Satz ist also — was die Berechnung der trigonometrischen Functionen für alle Winkel von 0 bis 90° betrifft — die Arbeit offenbar auf die Hälfte reducirt, weil man die trigonometrischen Functionen für alle Winkel von 45 bis 90° erhält, indem man nur die sinnverwandten Functionen derjenigen Winkel wieder abschreibt, welche erstere zu 90° ergänzen. So ist z. B.:

$$\sin 46^\circ = \cos 44^\circ$$

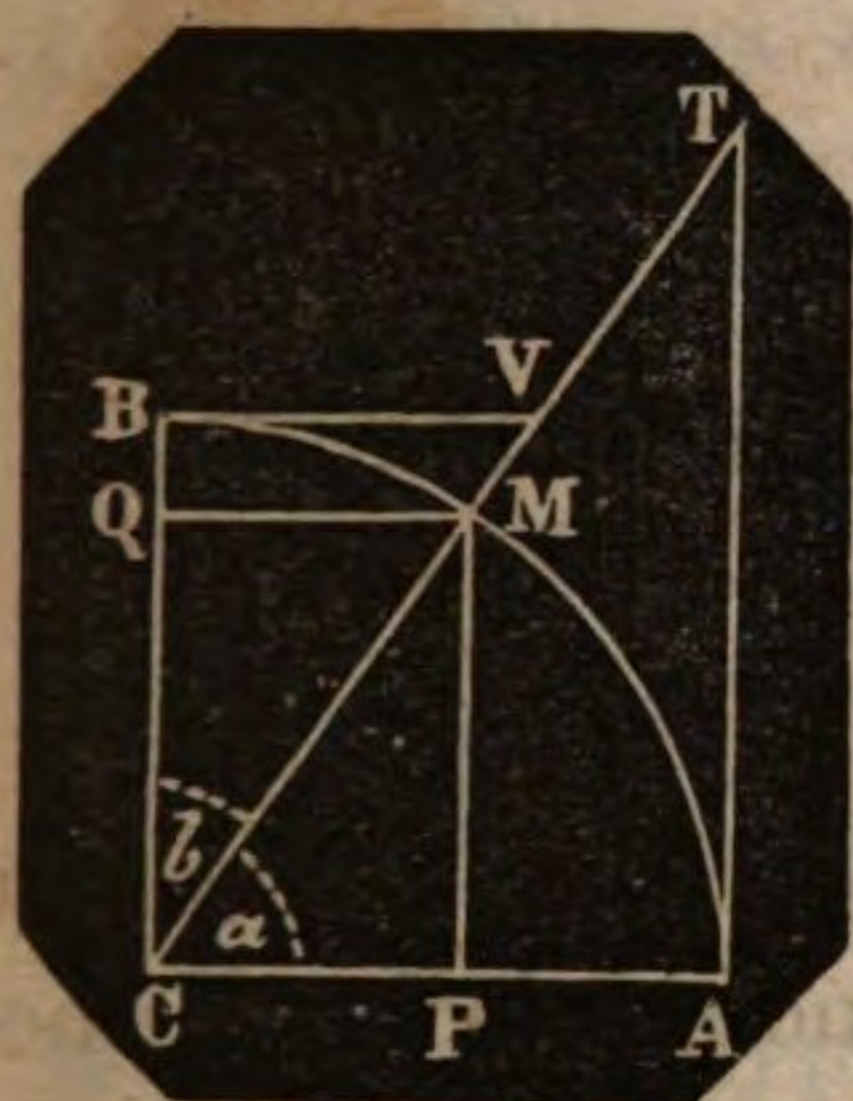
$$\sin 47^\circ = \cos 43^\circ$$

$$\cos 46^\circ = \sin 44^\circ$$

$$\cos 47^\circ = \sin 43^\circ$$

Es brauchten also die trigonometrischen Functionen nur für alle Winkel von 0 bis 45° berechnet zu werden. Dies geschah zuerst mit Zwischenräumen, welche dann durch Einschalten

7.



So wie man nämlich die Zahlenbegriffe: ein, zwei etc. durch die Zeichen 1, 2, 3 ... darstellen kann, so kann man sie auch durch Linien darstellen. Lässt man die Linie CA die Zahl eins bedeuten, so stellt offenbar

Beschreibt man nun zwischen den Schenkeln eines Winkels, a , mit der Linear-Einheit $CA=1$ einen Bogen AM und fällt von dem Endpunkt M auf CA das Perpendikel MP , so stellt schon MP den *sinus*, und CP den *cosinus* des Winkels a dar, weil hier die Division durch die Hypotenuse, weil sie die Einheit ist ($CM=CA=1$), wegfällt, indem $\frac{MP}{CM} = \frac{MP}{1} = MP$ etc.

Um die *tangente* des Winkels a , nämlich den Quotienten $\frac{MP}{CP}$ durch eine einzige Linie zu versinnlichen, ziehe man durch A eine Berührungslinie, welche den verlängerten Schenkel CM in T schneidet, so stellt, weil $CA=1$ ist, die Linie AT die *tangente* des Winkels a dar: denn wegen Aehnlichkeit der Dreiecke MCP und TCA ist $\frac{MP}{CP} = \frac{TA}{CA} = \frac{AT}{1} = AT$.

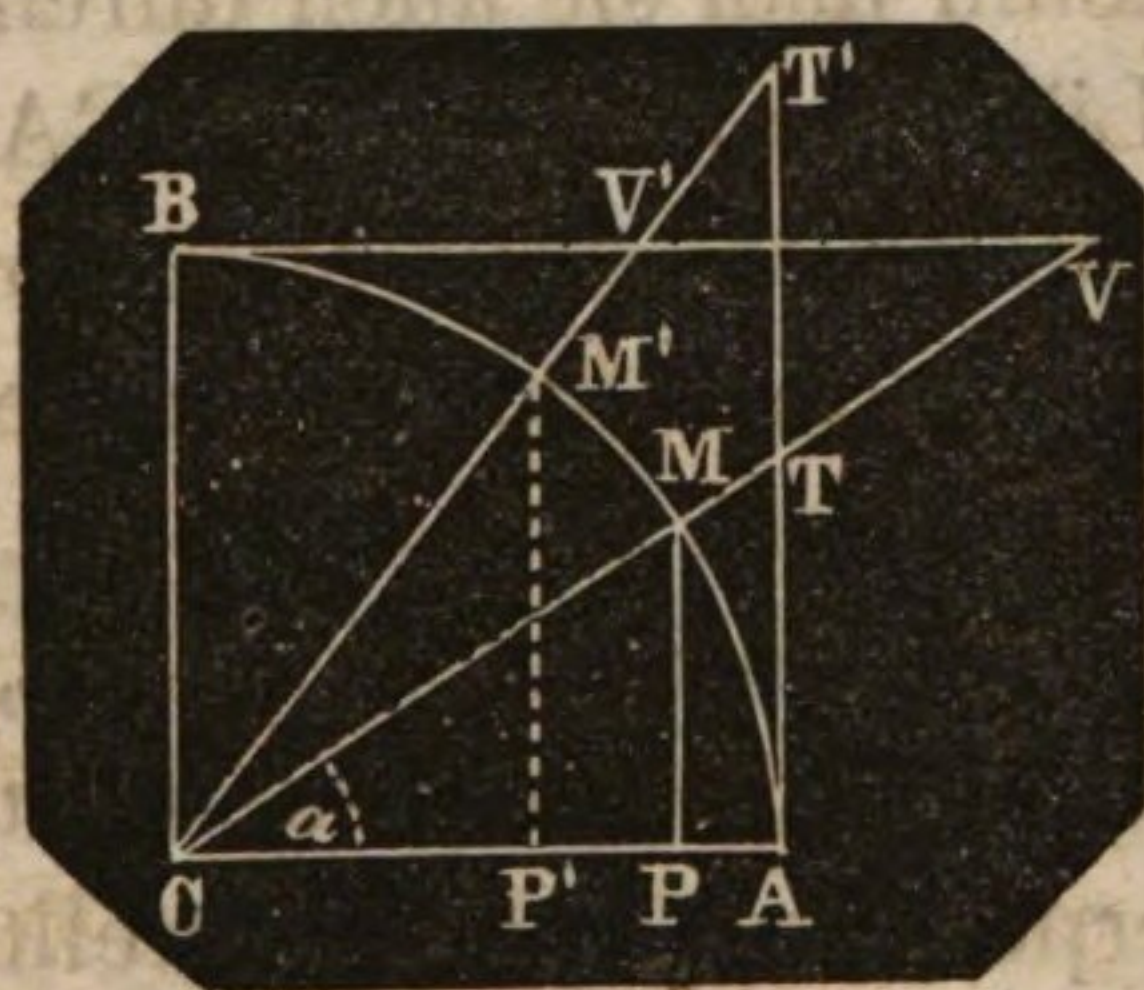
Um endlich auch die *cotangente* des Winkels a , nämlich den Quotienten $\frac{CP}{MP}$ durch eine einzige Linie darzustellen, sei

der Bogen $\widehat{AM}$ bis zu einem Viertelkreise (Quadranten) fortgeführt, mithin der *radius* BC senkrecht auf AC, so dass also der Winkel b den Winkel a zu 90° ergänzt, ferner seien BV und MQ senkrecht auf BC, dann ist nämlich BV die *cotangente* des Winkels a , denn wenn $BC=CA=1$ ist, so hat man, weil $\triangle MCP \cong \triangle MCQ$ und $\triangle MCQ \sim \triangle VCB$, $\cot a = \frac{CP}{MP} = \frac{MQ}{CQ} = \frac{BV}{BC} = \frac{BV}{1} = BV$. Für die Trigonometrie hat diese gekünstelte Dar-

stellung weiter keinen Nutzen, als vielleicht den Inhalt des folgenden § zu versinnlichen und dem Gedächtniss einzuprägen.*)

Grenzen der trigonometrischen Functionen.

8.



Aus der eben gezeigten bildlichen Darstellung der trigonometrischen Functionen oder auch aus dem rechtwinkligen Dreieck ist nun leicht zu ersehen, dass mit dem Wachsen eines Winkels auch dessen *sinus* und *tangente* wachsen, *cosinus* und *cotangente* aber abnehmen. Denn es sei CA der festliegende Schenkel des Winkels $MCA = a$, und dessen beweglicher Schenkel $MC = 1$ in die Lage $M'C$ gekommen, so ist der Winkel MCA grösser, nämlich $M'CP$ geworden, zugleich ist aber auch das ihm gegenüber liegende Loth (sein *sinus*) MP grösser, nämlich $M'P'$ geworden. Fällt der bewegliche Schenkel MC mit BC (senkrecht auf CA) zusammen, so wird MP auch $= MC = 1$, oder was dasselbe ist: in dem Bruche $\frac{MP}{CM} = \sin a$, wird für $a = 90^\circ$ der Zähler

*) Zur historischen Notiz dienend, möge hier noch bemerkt werden, dass in der alten Kunstsprache: die Linie AP, als Zahl gedacht (für $CA=1$), der *sinus versus* des Winkels a , und wenn von M auf BC das Perpendikel MQ gefällt wird, die Linie BQ der *cosinus versus*, ferner die Linie CT die *secante*, und CV die *cosecante* des Winkels a genannt wird, so dass also:
 $\sin \text{vers } a = 1 - \cos a$; $\cos \text{vers } a = 1 - \sin a$; $\sec a = \frac{1}{\cos a}$; $\text{cosec } a = \frac{1}{\sin a}$.

dem Nenner gleich, mithin $\sin 90^\circ = 1$. Wird dagegen der Winkel a immer kleiner, so wird auch sein *sinus*, MP, immer kleiner, und verschwindet mit dem Winkel, oder, was dasselbe sagt, in dem Bruch $\frac{MP}{CM} = \sin a$, wird für $a = 0^\circ$, der Zähler $MP = 0$, folglich $\sin 0^\circ = \frac{0}{CM} = 0$. Die *sinus* sind also immer echte Brüche (höchstens $= 1$).

Der *cosinus* eines Winkels $MCP = a$, nämlich CP, wird mit dem Wachsen des Winkels immer kleiner und für $a = 90^\circ$, wo P in C fällt, offenbar $= 0$, folglich $\cos 90^\circ = 0$. Dies folgt auch aus dem rechtwinkligen Dreieck MCP, indem der Zähler des Bruches $\frac{CP}{CM} = \cos a$, für $a = 90^\circ$, Null wird, daher $\cos 90^\circ = \frac{0}{CM} = 0$. Mit dem Abnehmen des Winkels a dagegen wird sein *cosinus*, nämlich CP, immer grösser und zuletzt gleich $CA = 1$, oder, was dasselbe ist: das anliegende Loth wird, für $a = 0^\circ$, der Hypotenuse gleich, daher im Bruch $\frac{CP}{CM} = \cos a$, für $a = 0^\circ$, der Zähler dem Nenner gleich, mithin $\cos 0^\circ = 1$. Die *cosinus* sind also auch immer echte Brüche (höchstens $= 1$).

Mit dem Abnehmen des Winkels a wird (für $CA = 1$) die *tangente* AT offenbar immer kleiner und verschwindet mit dem Winkel, indem dann T auf A fällt, oder in dem Bruch $\frac{MP}{CP} = \tan a$, wird, für $a = 0^\circ$, auch der Zähler $= 0$, und der Nenner gleich CA, $= 1$, daher $\tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$. Wächst dagegen der Winkel a , so wächst auch seine *tangente*, und muss zuletzt jede noch so grosse Zahl überschreiten. Ist der Winkel a schon beinahe 90° geworden, so geht die Linie CT fast parallel mit AT, der Durchschnittspunkt T rückt, mit dem Wachsen des Winkels a , immer weiter von A, es ist also, wenn a sehr nahe $= 90^\circ$ ist, auch CA in AT (oder CP in MP) sehr viele mal (hundert, tausend, Millionen..... mal) enthalten. Wird aber $a = 90^\circ$, so hat (für $CA = 1$) die *tangente* AT alle bestimmten Zahlen überschritten, und ist also unendlich (∞) gross geworden, daher $\tan 90^\circ = \infty$. Dasselbe folgt auch: weil in dem Quotienten $\frac{MP}{CP} = \tan a$, für $a = 90^\circ$, das gegenüber liegende Loth

$MP = BC$, und das anliegende Loth $CP = 0$ wird; daher:

$$tg\ 90^\circ = \frac{BC}{0} = \infty. \quad *)$$

Mit dem Wachsen des Winkels $MCP = a$ wird offenbar die *cotangente* BV immer kleiner, und verschwindet für $a = 90^\circ$, wo V auf B fällt, daher $cot\ 90^\circ = 0$. Dasselbe folgt aus dem

Bruche $\frac{CP}{MP} = cot\ a$, in welchem, für $a = 90^\circ$, der Zähler (das anliegende Loth) $CP = 0$, und der Nenner $MP = CM = CB$ wird;

daher $cot\ 90^\circ = \frac{0}{BC} = 0$. Nimmt dagegen der Winkel a immer fort bis 0 ab, so wird die *cotangente* dabei immer grösser und grösser, und es giebt keine so grosse Zahl, welche sie nicht überschreiten könnte, daher $cot\ 0 = \infty$. Wir haben demnach folgende wohl zu merkende Formeln: **)

$$\sin 0 = 0$$

$$\sin 90 = 1$$

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos 90 = 0$$

$$tg\ 0 = 0$$

$$tg\ 90 = \infty$$

$$cot\ 0 = \infty$$

$$cot\ 90 = 0$$

Einrichtung der trigonometrischen Tafeln.

9.

In der Einleitung ist gezeigt, dass wir mittelst der trigonometrischen Functionen aus den in Zahlen gegebenen Stücken eines Dreiecks die dadurch bestimmten Stücke leicht berechnen können, und zwar durch eine einfache Multiplication oder Division. Da man diese Operationen aber immer am bequemsten mit Logarithmen vollzieht, und es also sehr umständlich sein würde, zu gegebenen Winkeln erst die trigonometrischen Functionen

*) Dividirt man eine Zahl, z. B. die Einheit, durch immer kleinere Zahlen, so wird der Quotient immer grösser, z. B. $\frac{1}{0,1} = 10$; $\frac{1}{0,01} = 100$;

$\frac{1}{0,001} = 1000$ etc., $\frac{1}{0} = \infty$. Eben so verhält es sich mit dem Ausdruck

$\frac{MP}{CP} = tg\ a$. Wächst a von 0 bis 90° , so wird der Zähler MP immer grösser, der Nenner CP immer kleiner, und zuletzt, für $a = 90^\circ$, wird $\frac{MP}{CP} = \frac{BC}{0} = \infty$.

**) Wir werden sämtliche Formeln, so wie wir sie nach und nach finden, in § 100 übersichtlich zum Nachschlagen zusammen stellen.

und dann zu diesen Functionen wieder die Logarithmen zu suchen, so sind offenbar viel zweckmässiger und zugleich Raum sparend die trigonometrischen Functionen nicht selbst, sondern gleich ihre Logarithmen eingetragen, indem in den höchst seltenen Fällen, wo man die trigonometrische Function eines Winkels selbst nöthig hat, dieselbe ja leicht aus ihren Logarithmen gefunden werden kann. So haben wir z. B. § 4 gefunden, dass:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,8660254$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0,5773502$$

$$\operatorname{cot} 30^\circ = \sqrt{3} = 1,7320508$$

Mithin sollte in den trigonometrischen Tafeln stehen:

$$\log \sin 30^\circ = 0,6989700 - 1$$

$$\log \cos 30^\circ = 0,9375306 - 1$$

$$\log \operatorname{tg} 30^\circ = 0,7614394 - 1$$

$$\log \operatorname{cot} 30^\circ = 0,2385606$$

Da aber nach § 7 alle *sinus* und *cosinus*, ferner alle *tangenten* von 0 bis 45°, und alle *cotangenten* von 45 bis 90° immer echte Brüche sind, deren Logarithmen folglich negative Kennziffern haben, so hat man, um den Raum für die negativen Kennziffern zu sparen, sämtliche Logarithmen (indem man zur positiven und negativen Kennziffer gleichviel addirt, wodurch deren Werthe nicht geändert werden) so geformt: dass sie alle 10 zur negativen Kennziffer haben, und dann, weil man dieses einmal weiss, bei Eintragung der Logarithmen diese negative Kennziffer (—10) zur Ersparung des Raumes allenthalben weglassen. So findet man z. B. in den Vega'schen Tafeln unter der Ueberschrift *log sinus* den Logarithmen des *sinus* von 30°, nämlich $\log \sin 30^\circ = 9,6989700$ statt $\log \sin 30^\circ = 9,6989700 - 10$. Der Anfänger muss also beachten, zu jedem aus der Tafel herausgeschriebenen Logarithmen einer trigonometrischen Function immer —10, als negative Kennziffer, hinzuzufügen. So ist z. B. $\log \operatorname{tg} 30^\circ = 9,7614394 - 10$ und $\log \operatorname{cot} 30^\circ = 10,2385606 - 10$.

10.

Die fernere Einrichtung der trigonometrischen Tafeln ist nun so: dass man die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von in Graden und Minuten gegebenen Winkeln, wenn sie unter

45° sind, findet, indem man die Grade oberhalb (am Kopfe) und die Minuten linker Hand (in der ersten Spalte), dagegen von allen Winkeln über 45°, indem man die Grade unten (am Fusse), die Minuten jetzt aber rechter Hand (in der letzten Spalte) sucht, und aus der gehörigen Spalte und der Querzeile, in welcher die Minuten stehen, den fraglichen Logarithmen heraus schreibt. So findet man z. B.:

$$\log \sin 36^\circ 10' = 9,7709522 - 10$$

$$\log \sin 53^\circ 50' = 9,9070370 - 10$$

$$\log \cos 36^\circ 10' = 9,9070370 - 10$$

$$\log \cos 53^\circ 50' = 9,7709522 - 10$$

Der Grund hiervon ist offenbar der: weil, wie in § 5 und § 6 gezeigt, die trigonometrische Function eines Winkels zugleich auch die sinnverwandte Function des Winkels ist, welcher ersteren zu 90° ergänzt, weshalb auch die Summe der auf einerlei Seite der Tafeln oben und unten stehenden Grade und der linker und rechter Hand in einerlei Querzeile stehenden Minuten immer = 90° sein muss.

11.

Um die Logarithmen der trigonometrischen Functionen für Winkel zu finden, welche in Graden, Minuten und Secunden ausgedrückt sind, überlege man Folgendes: Subtrahirt man mehrere von Minute zu Minute in den trigonometrischen Tafeln auf einander folgenden Logarithmen von einander, so zeigt sich, dass, innerhalb kleiner Intervalle, die Differenzen in den letzten Decimalen den Zunahmen der Minuten proportional sind. Man hat z. B.:

	Differenzen:	
	für 1'	für 1"
$\log \sin 43^\circ 2' = 9,8340541 - 10$		
$\log \sin 43^\circ 3' = 9,8341894 - 10$	1353	22,55
$\log \sin 43^\circ 4' = 9,8343246 - 10$	1352	22,53

Wächst also der Winkel von 43° 2' um eine Minute, so wächst sein $\log \sinus$ in den vier letzten Decimalen um 1353; wächst der Winkel von 43° 2' um zwei Minuten, so wachsen die vier letzten Decimalen seines $\log \sinus$ um 2 mal 1353 etc. Wächst also der Winkel von 43° 2' um eine Secunde = $\frac{1}{60}'$, so werden offenbar die vier letzten Decimalen seines $\log \sinus$ auch

nur um $\frac{1353}{60} = 22,55$ wachsen und um 2 mal $22,55 = 45,10$, wenn der Winkel um 2 Secunden zunimmt etc.

12.

Aus dem vorhergehenden § folgt nun von selbst die einfache Regel: Um zu einem in Graden, Minuten und Secunden gegebenen Winkel eine logarithmisch-trigonometrische Function zu finden, suche man dieselbe erst für die Grade und Minuten, multiplicire dann die in den Tafeln ausgesetzte Differenz für eine Secunde mit der Anzahl der Secunden und addire oder subtrahire das Product, je nachdem die trigonometrische Function mit dem Winkel wächst oder abnimmt (§ 7). So findet man z. B.:*)

$$\log \sin 43^\circ 2' = 9,8340541$$

$$12 \text{ mal } 22,55 = \dots\dots 271 \text{ also:}$$

$$\log \sin 43^\circ 2' 12'' = 9,8340812 - 10$$

Ebenso hat man:

$$\log \cos 43^\circ 2' = 9,8638917$$

$$12 \cdot (19,66) = \dots\dots 236 \text{ also:}$$

$$\log \cos 43^\circ 2' 12'' = 9,8638681 - 10$$

Ein Blick in die trigonometrischen Tafeln lehrt, dass für sehr kleine Winkel die logarithmischen Differenzen den Zunahmen der Minuten nicht proportional sind. Deshalb sind auch, der sichern und leichtern Rechnung halber, die Logarithmen der trigonometrischen Functionen anfangs von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ Secunde, dann von Secunde zu Secunde und dann von 10 zu 10 Secunden berechnet und eingetragen. (Vergl. die den Tafeln vorgedruckte Einleitung.)

13.

Der Grund, dass die $\log \operatorname{tg}$ und $\log \operatorname{cot}$ gleiche Differenzen haben und für dieselben deshalb nur eine Spalte nöthig war,

*) Alle in diesem Buche vorkommenden Logarithmen sind aus einer der am meisten verbreiteten ältern stereot. Ausgaben der Vega'schen Tafeln entnommen und können deshalb von den neuern Ausgaben, welche in den Proportionaltheilen noch die achte Decimale berücksichtigen, in der siebenten Decimale um eine Einheit abweichen. Die neueren Ausgaben enthalten die trigonometrischen Functionen von 10 zu 10 Secunden sammt den Proportionaltheilen für 1 bis 9 Secunden.

ist folgender: Ist von irgend einem Winkel, B, die *tangente* desselben $= \frac{b}{c}$, so ist die *cotangente* desselben $= \frac{c}{b}$, daher das Product beider immer $= 1$. In Zeichen: $tg B \cdot cot B = 1$. Hieraus folgt aber (weil $\log 1 = 0$):

$$\log tg B + \log cot B = 0$$

$$\log tg B = -\log cot B$$

Die erste Formel zeigt, dass wenn man die Logarithmen der *tang* und *cot* irgend eines Winkels addirt, die Summe immer $= 0$ ist. Da ferner die Logarithmen zweier reciproker Grössen $\frac{b}{c}$ und $\frac{c}{b}$ immer gleich gross sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben (z. B. $\log \frac{3}{2} = 0,1760913$ und $\log \frac{2}{3} = -0,1760913$), so ist klar, dass sie auch gleiche Differenzen haben müssen. So ist z. B.:

$$\log tg 43^\circ 2' 12'' = 9,9702130 - 10 = -0,0297870$$

$$\log cot 43^\circ 2' 12'' = 10,0297870 - 10 = +0,0297870$$

14.

Umgekehrt findet man zu einer nicht genau in den Tafeln enthaltenen logarithmisch trigonometrischen Function den zugehörigen Winkel, indem man die nächst kleinere von dem gegebenen subtrahirt, und in den Rest mit der Differenz für 1'' dividirt, dann giebt der Quotient die Anzahl Secunden, welche zu den, bei der nächst kleinern logarithmisch-trigonometrischen Function stehenden Graden und Minuten hinzu addirt, oder davon subtrahirt werden müssen, je nachdem die trigonometrischen Functionen mit dem Winkel wachsen, wie *sin* und *tg*, oder abnehmen, wie *cos* und *cot*. Wäre z. B. gegeben:

$$\log sin x = 9,8340812, \text{ so ist:}$$

$$\log sin 43^\circ 2' = 9,8340541$$

$$\dots\dots 271$$

Die Differenz für 1'' ist in dieser Gegend $= 22,55$; daher $\frac{271}{22,55} = \frac{27100}{2255} = 12''$, mithin, weil der Winkel mit dem *sinus* wächst, der gesuchte Winkel $x = 43^\circ 2' 12''$.

Mit diesen Vorkenntnissen ausgerüstet, können wir nun zur wirklichen Berechnung der Dreiecke schreiten.

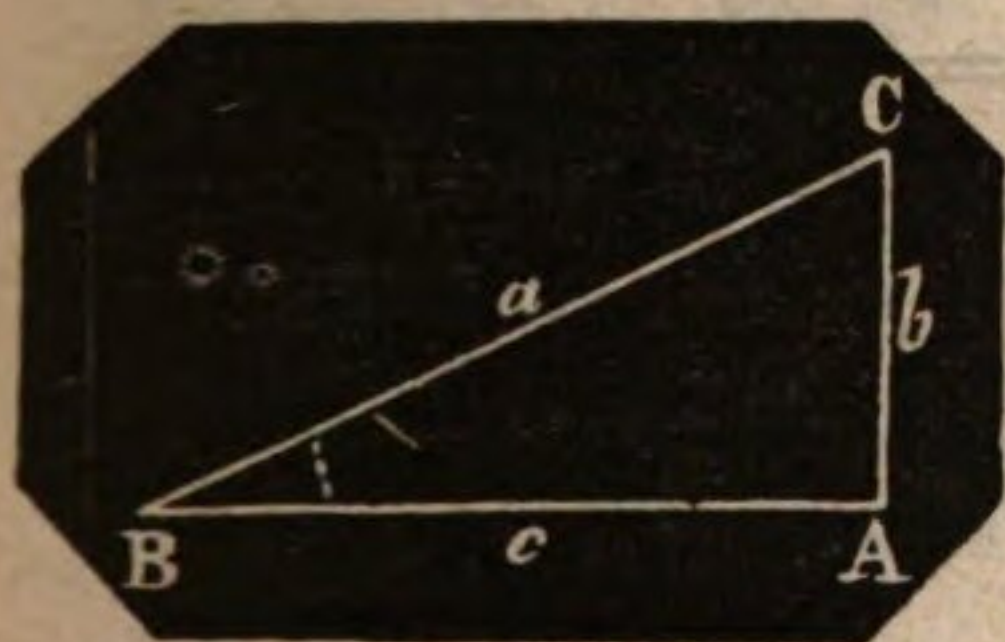
Zweites Buch.

Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

15.

Die leichten Regeln für die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks folgen von selbst aus den Erklärungen der trigonometrischen Functionen. (§ 2). Wird nämlich eine Gleichung zwischen zwei Seiten und einem Winkel verlangt, so geben die beiden Seiten, gehörig zur Division (als Quotient) angesetzt, die entsprechende trigonometrische Function des Winkels, und man braucht dann diese kleine Formel, im Fall nicht der Winkel, sondern die eine Seite gesucht wird, nur noch auf die gesuchte Seite zu reduciren, wie folgende Beispiele zeigen.

16.



Aufgabe. Es ist die Hypotenuse und ein Winkel gegeben: $a = 2057898$, $B = 35^\circ 26' 14''$. Man sucht die übrigen Stücke b, c, C

Auflösung. Man hat: $C = 90 - B = 54^\circ 33' 46''$, dann (§ 2):

$$\frac{b}{a} = \sin B \quad \text{und} \quad \frac{c}{a} = \cos B \quad (\S 2),$$

$$\text{hieraus: } b = a \sin B \quad \text{und} \quad c = a \cos B^*)$$

$$\log \sin B = 9,7632861 - 10$$

$$\log \cos B = 9,9110250 - 10$$

$$\dots a = 6,3134239$$

$$\dots a = 6,3134239$$

$$\log b = 6,0767100$$

$$\log c = 6,2244489$$

$$b = 1193191$$

$$c = 1676675$$

*) In Worten: Die Hypotenuse mit dem *sinus* multiplicirt, giebt das gegenüber liegende Loth, mit dem *cosinus* multiplicirt, das anliegende Loth. Wer diese kurze Regel im Gedächtniss hat, kann aus der Hypotenuse und einem der spitzen Winkelleicht die ihm gegenüber und anliegenden Lothe berechnen.

17.

Aufgabe. Es ist eine Cathete und ein Winkel gegeben, nämlich: $c=1300579$, $B=65^{\circ} 18' 40''$.

Man sucht die übrigen Stücke C , b , a .

Auflösung. Man hat $C=90-B$, dann:

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B$$

$$\cos B = \frac{c}{a}$$

$$b = c \operatorname{tg} B$$

$$a \cdot \cos B = c$$

$$a = \frac{c}{\cos B}$$

$$\log \operatorname{tg} B = 10,3375125 - 10$$

$$\log c = 6,1141367$$

$$\dots c = 6,1141367$$

$$\dots \cos B = 9,6208550 - 10$$

$$\dots b = 6,4516492$$

$$\dots a = 6,4932817$$

$$b = 2829106$$

$$a = 3113735$$

18.

Aufgabe. Es ist die Hypotenuse a und eine Cathete, b , gegeben: $a=3798,47$; $b=1480,99$. Man sucht die übrigen Stücke c , B , C .

Auflösung. Man hat:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\sin B = \frac{b}{a} = \cos C$$

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$$

$$\log b = 3,1705522$$

$$\log(a+b) = 3,7225895$$

$$\dots a = 3,5796087$$

$$\dots (a-b) = 3,3650160$$

$$2) 7,0876055$$

$$\log \sin B = 9,5909435 - 10$$

$$\log c = 3,5438027$$

$$B = 22^{\circ} 56' 52''$$

$$c = 3497,862$$

$$C = 67^{\circ} 3' 8''$$

19a.

Aufgabe. Es sind gegeben beide Catheten: $b=0,8745932$, $c=0,5670073$. Man sucht die Winkel B und C und die Hypotenuse a .

Auflösung. Man hat:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c} = \cot C$$

oder kürzer (indem man erst den Winkel B berechnet):

$$\log b = 0,9418061 - 1$$

$$a = \frac{b}{\sin B}$$

$$\dots c = 0,7535886 - 1$$

$$\log b = 0,9418061 - 1$$

$$\log \operatorname{tg} B = 10,1882175$$

$$\dots \sin B = 9,9238086 - 10$$

$$B = 57^{\circ} 2' 39''$$

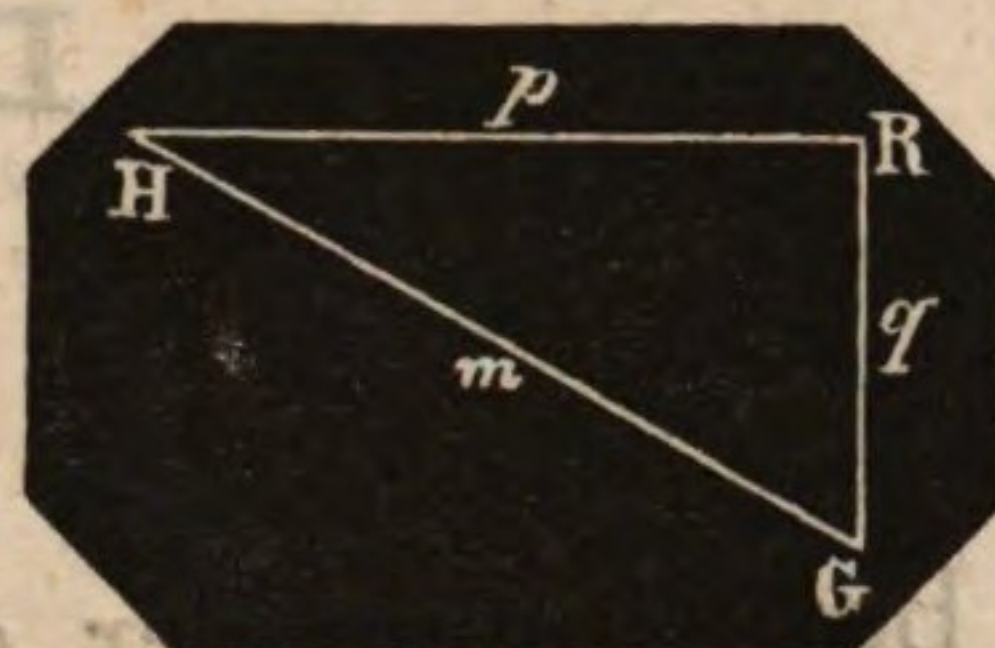
$$\log a = 0,0179975$$

$$C = 32^{\circ} 57' 21''$$

$$a = 1,042311$$

19b.

Um Sicherheit und Gewandtheit in der Berechnung rechtwinkliger Dreiecke zu erlangen, wird der Anfänger wohl thun, die folgenden 9 Aufgaben mehrmals zu lösen und dabei jedesmal das bei R rechtwinklige Dreieck in eine andere Lage zu zeichnen.



Anmerkung. Bei der 4ten Aufgabe hat man:

$$\frac{q}{p} = \cot G \text{ und auch}$$

$\frac{p}{q} = \tan G$. Aus der 1sten Gleichung folgt

$$q = p \cot G \text{ und aus}$$

der 2ten: $q = \frac{p}{\tan G}$. Es ist also einerlei, ob man eine Grösse mit der *cotangente* eines Winkels multiplirt oder durch die *tangente* desselben dividirt und umgekehrt. Dies folgt schon aus § 13, wornach immer $\tan G \cdot \cot G = 1$, mit-

$$\text{hin: } \cot G = \frac{1}{\tan G} \text{ und}$$

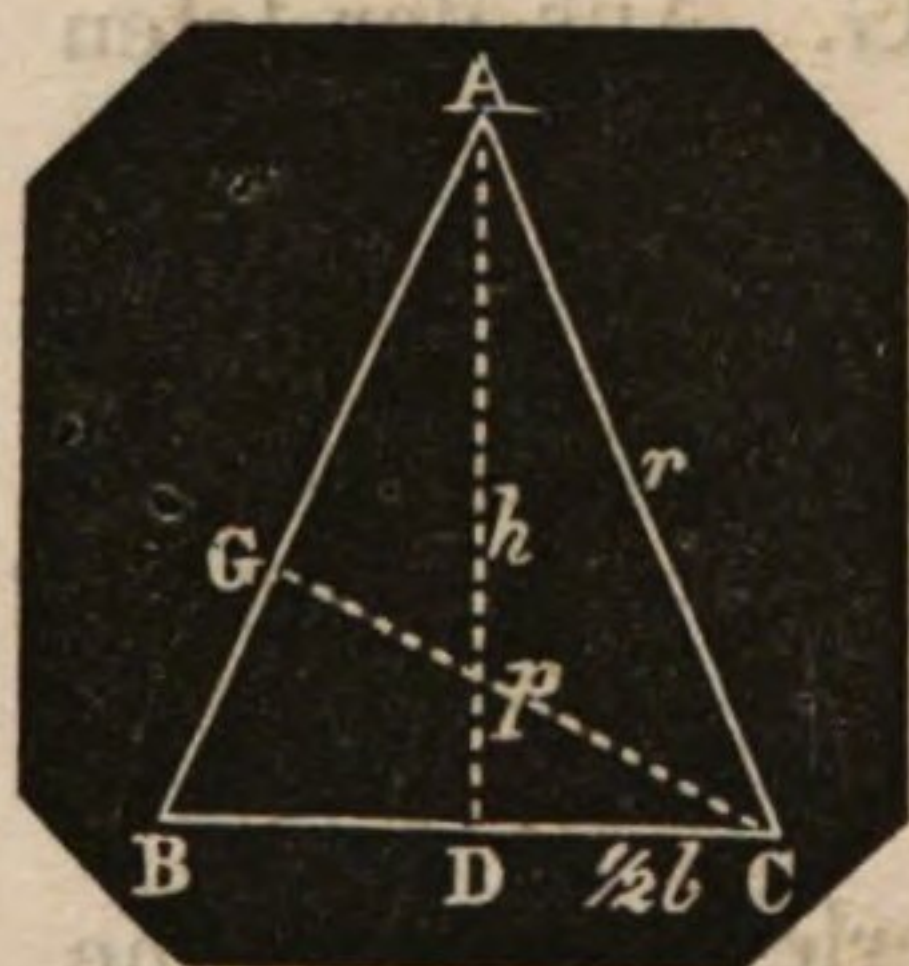
$$\tan G = \frac{1}{\cot G}.$$

	Gegeben	Gesucht.	Auflösung.
1	m, G	p, q	$p = m \sin G$ $q = m \cos G$
2	m, H	p, q	$p = m \cos H$ $q = m \sin H$
3	p, H	q, m	$q = p \tan H$ $m = \frac{p}{\cos H}$
4	p, G	q, m	$q = p \cot G = \frac{p}{\tan G}$ $m = \frac{p}{\sin G}$
5	q, G	p, m	$p = q \tan G$ $m = \frac{q}{\cos G}$
6	q, H	p, m	$p = q \cot H = \frac{q}{\tan H}$ $m = \frac{q}{\sin H}$
7	m, q	p, H, G	$p = \sqrt{(m+q)(m-q)}$ $\sin H = \frac{q}{m} = \cos G$
8	m, p	q, H, G	$q = \sqrt{(m+p)(m-p)}$ $\cos H = \frac{p}{m} = \sin G$
9	p, q	H, G, m	$\tan H = \frac{q}{p} = \cot G$ $m = \sqrt{p^2 + q^2}$

Drittes Buch.

Berechnung der gleichschenkligen Dreiecke und regelmässigen Vielecke.

20.



Aufgabe. Es sind die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks und der Winkel an der Spitze gegeben, nämlich: $AB=AC=r=15079,38$ und der Winkel $BAC=A=50^{\circ} 16'48''$. Man sucht die Grundlinie $BC=b$, die Höhe $AD=h$ und den Flächeninhalt F .

Auflösung. Weil durch das Perpendikel AD das gleichschenklige Dreieck in zwei gleiche rechtwinklige zerlegt wird, so hat man:

$$\frac{\frac{1}{2}b}{r} = \sin \frac{1}{2}A$$

$$b = 2r \sin \frac{1}{2}A$$

$$\log \sin \frac{1}{2}A = 9,6282167 - 10$$

$$\dots\dots\dots r = 4,1783834$$

$$\dots\dots\dots 2 = 0,3010300$$

$$\dots\dots\dots b = 4,1076301$$

$$b = 12812,39$$

$$\frac{h}{r} = \cos \frac{1}{2}A$$

$$h = r \cos \frac{1}{2}A$$

$$\log \cos \frac{1}{2}A = 9,9567793 - 10$$

$$\dots\dots\dots r = 4,1783834$$

$$\dots\dots\dots h = 4,1351627$$

$$h = 13650,94$$

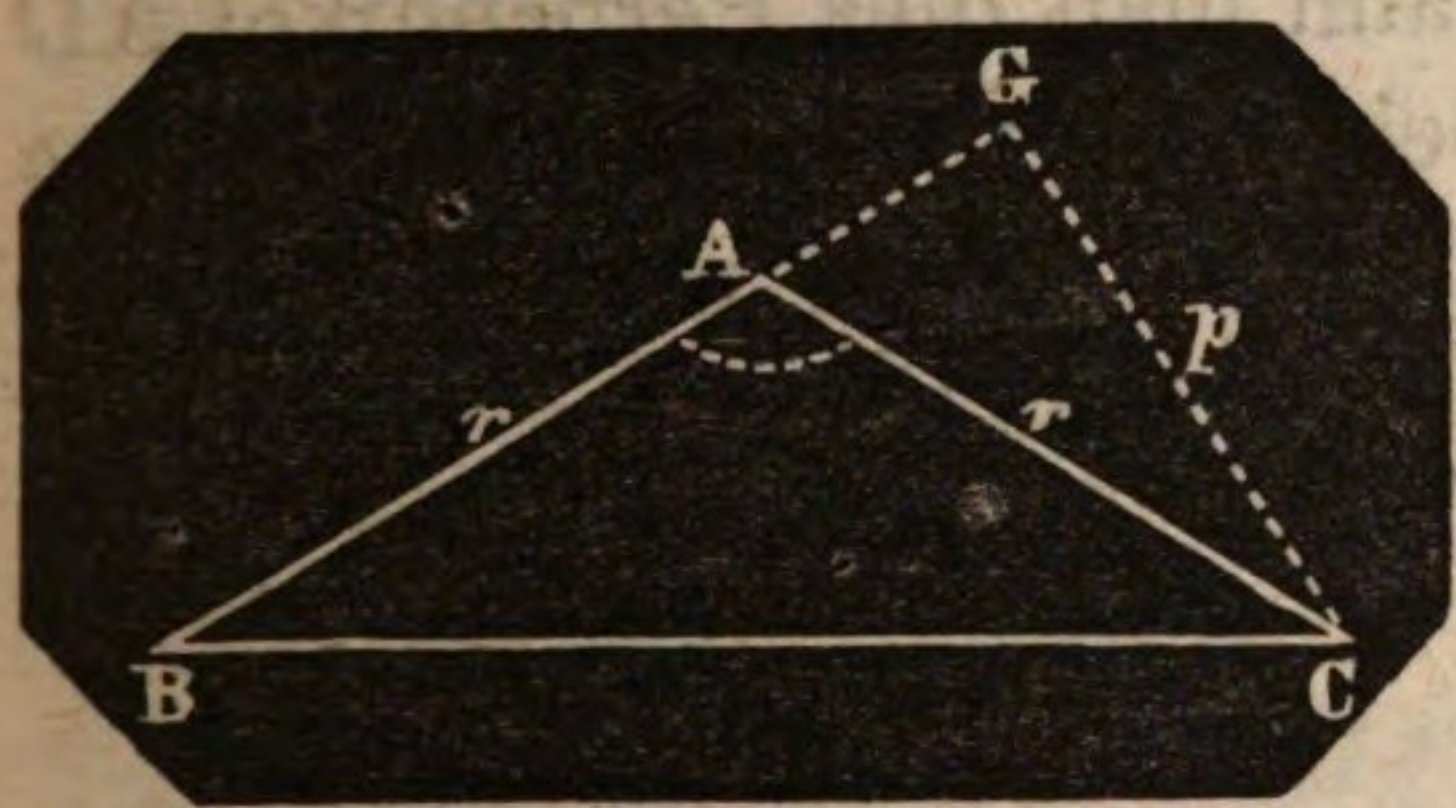
Den Flächeninhalt $F = \frac{1}{2}bh$ könnte man erhalten, indem man die für $\frac{1}{2}b$ und h gefundenen Ausdrücke $r \sin \frac{1}{2}A$ und $r \cos \frac{1}{2}A$ mit einander multiplicirt, dies gäbe $F = r^2 \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}A$. Man erhält aber für den Inhalt F eine bequemere Formel, wenn man

$AB=r$ als Grundlinie betrachtet und auf diese das Perpendikel $CG=p$ fällt; dann hat man aus dem rechtwinkligen Dreieck ACG , $\frac{p}{r} = \sin A$, mithin $p=r \sin A$. Dies mit der halben Grundlinie ($\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r$) multiplicirt, kommt:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}r^2 \sin A \\ \log \sin A &= 9,8860260 - 10 \\ 2 \log r &= 8,3567668 \\ \dots 0.5 &= 0,6989700 - 1 \\ \dots\dots F &= 7,9417628 \\ F &= 87450600 \square' \end{aligned}$$

21.

Bei vorstehender Formel für den Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks ($F = \frac{1}{2}r^2 \sin A$) ist jedoch zu bemerken, dass, wenn der Winkel A an der Spitze ein stumpfer ist, das Perpendikel $CG=p$, womit die halbe Grundlinie ($\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}r$) multiplicirt werden muss, ausserhalb des Dreiecks auf die Verlängerung der Grundlinie fällt. Da



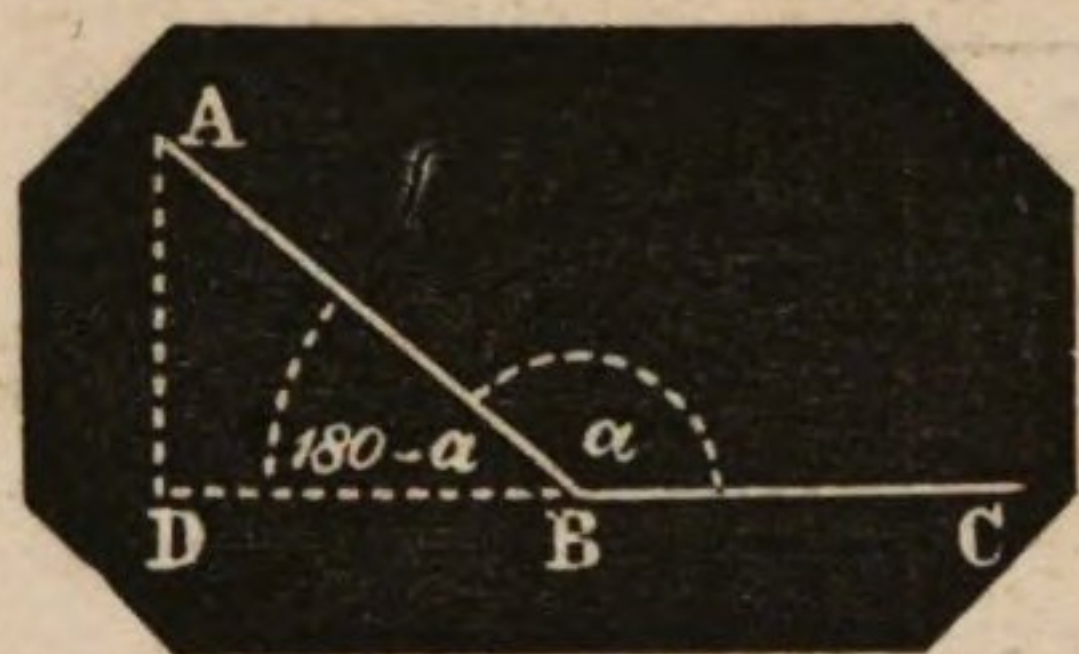
aber aus dem gegebenen stumpfen Winkel A leicht sein Nebenwinkel $\widehat{GAC} = 180 - A$ zu berechnen und dann $\frac{p}{r} = \sin(180 - A)$

ist, so hat man: $p = r \sin(180 - A)$. Die vorhergehende Formel für den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks: $F = \frac{1}{2}r^2 \sin A$, könnte also, im Fall der Winkel A stumpf wäre, durch $F = \frac{1}{2}r^2 \sin(180 - A)$ ausgedrückt werden. Allein dieser Fall braucht gar nicht als ein besonderer betrachtet und durch eine eigene Formel dargestellt zu werden. Der erste Begründer der Trigonometrie bemerkte nämlich bald, dass erstere Formel $F = \frac{1}{2}r^2 \sin A$ beide Fälle begreift und folglich allgemein ist, der Winkel A möge spitz oder stumpf sein, wenn man nur den Begriff des *sinus*, der anfangs auf spitze Winkel beschränkt wurde, erweitert und auch auf stumpfe Winkel ausdehnt, wobei man dann aber die kleine Regel zu merken hat: dass der *sinus* eines stumpfen Winkels gleich ist dem *sinus* seines Nebenwinkels, und dass man — weil in den trigonometrischen Tafeln keine

stumpfen Winkel vorkommen — um den *sinus* eines stumpfen Winkels mittelst der Tafeln zu finden, diesen Winkel erst von 180° abziehen und dann zu dem Rest den *sinus* nehmen muss; so ist z. B.: $\sin 150^\circ = \sin(180 - 150) = \sin 30^\circ$, $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$. Allgemein, wenn a irgend einen Winkel, spitz oder stumpf, bedeutet:

$$\sin(180 - a) = \sin a$$

22.



Diese Erweiterung des Begriffs *sinus* hebt aber keineswegs die § 2 gegebene Erklärung desselben auf, denn es sei $\widehat{ABC} = a$ ein stumpfer Winkel. Schneidet man von dem einen Schenkel ein beliebiges Stück, BA, ab, fällt von A auf den andern Schenkel (hier also auf die Verlängerung desselben) das Perpendikel AD, so kann man dies Perpendikel AD sowohl dem Winkel a , als auch seinem Nebenwinkel $180^\circ - a$ gegenüber liegend betrachten, und es ist dann, nach der gegebenen Erklärung, $\sin a = \sin(180 - a) = \frac{AD^*)}{AB}$

23.

Aus vorhergehendem § folgt, dass die *sinus* zweier Nebenwinkel vollkommen gleich sind, ferner, dass der zu einem bestimmten Winkel gehörige *sinus* vollkommen bestimmt ist, der Winkel möge spitz oder stumpf sein. Umgekehrt aber, dass der zu einem bestimmten *sinus* gehörige Winkel unbestimmt ist, indem zu ihm, ausser dem spitzen Winkel, den man in den Tafeln aufschlägt, auch noch der stumpfe Nebenwinkel gehört.

24 a.

Aufgabe. Es ist von einem gleichschenkligen Dreieck der Winkel an der Spitze $A = 140^\circ 16' 28''$ und die Länge der Schenkel $AB = AC = r = 505',67$ gegeben. Man sucht den Inhalt F?

*) Hätten wir den Begriff des *sinus*, so wie nun erst hier geschehen, schon zu Anfang des § 2 auf den stumpfen Nebenwinkel ausdehnen wollen, so hätte der Anfänger noch nicht den Zweck und Nutzen davon einsehen, also auch nicht mit klaren Begriffen folgen können.

Auflösung. Nach § 21 hat man:

$$\begin{array}{rcl}
 F & = & \frac{1}{2}r^2 \sin A \\
 \log \sin A & = & 9,8055762 - 10 \\
 \dots\dots r^2 & = & 5,4077344 \\
 \dots\dots 0,5 & = & 0,6989700 - 1 \\
 \dots\dots F & = & 4,9122806 \\
 F & = & 81711 \square'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 & & 180^\circ \\
 A & = & 140 \cdot 16 \cdot 28 \\
 180 - A & = & 39^\circ 43' 32''
 \end{array}$$

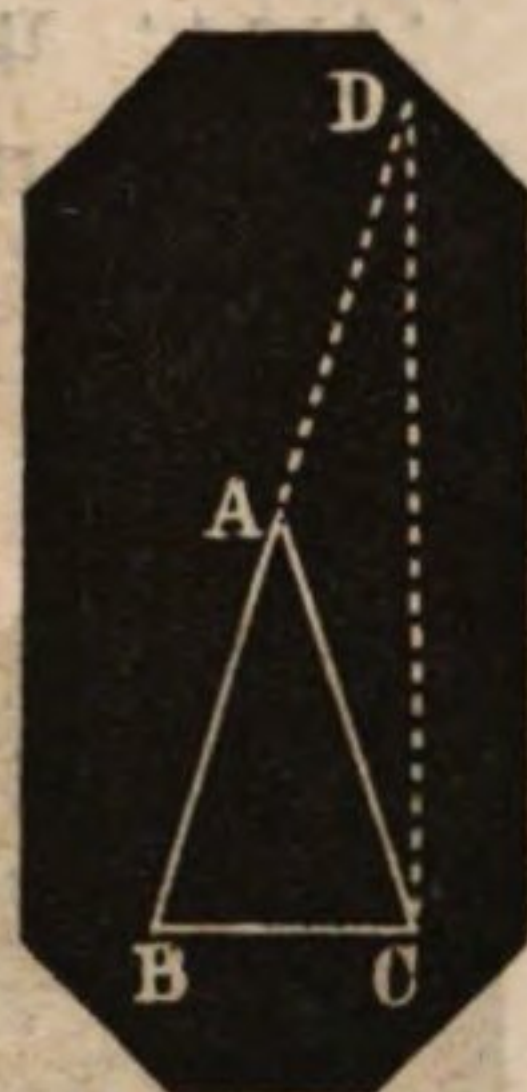
24b.

Aufgabe. Von einem gleichschenkligen Dreieck sind die Schenkel $AB=AC=r=304'$ und der Flächeninhalt $F=7945 \square'$ gegeben. Wie gross ist der Winkel A an der Spitze?

Auflösung. Aus der Formel $F=\frac{1}{2}r^2 \sin A$ (§ 24) folgt:

$$\begin{array}{rcl}
 \sin A & = & \frac{2F}{r^2} \\
 \log F & = & 3,9000939 \\
 \dots 2 & = & 0,3010300 \\
 & & 4,2011239 \\
 2 \log r & = & 4,9657472 \\
 \log \sin A & = & 9,2353767 - 10 \\
 \text{also } A & = & 9^\circ 54' 2''
 \end{array}$$

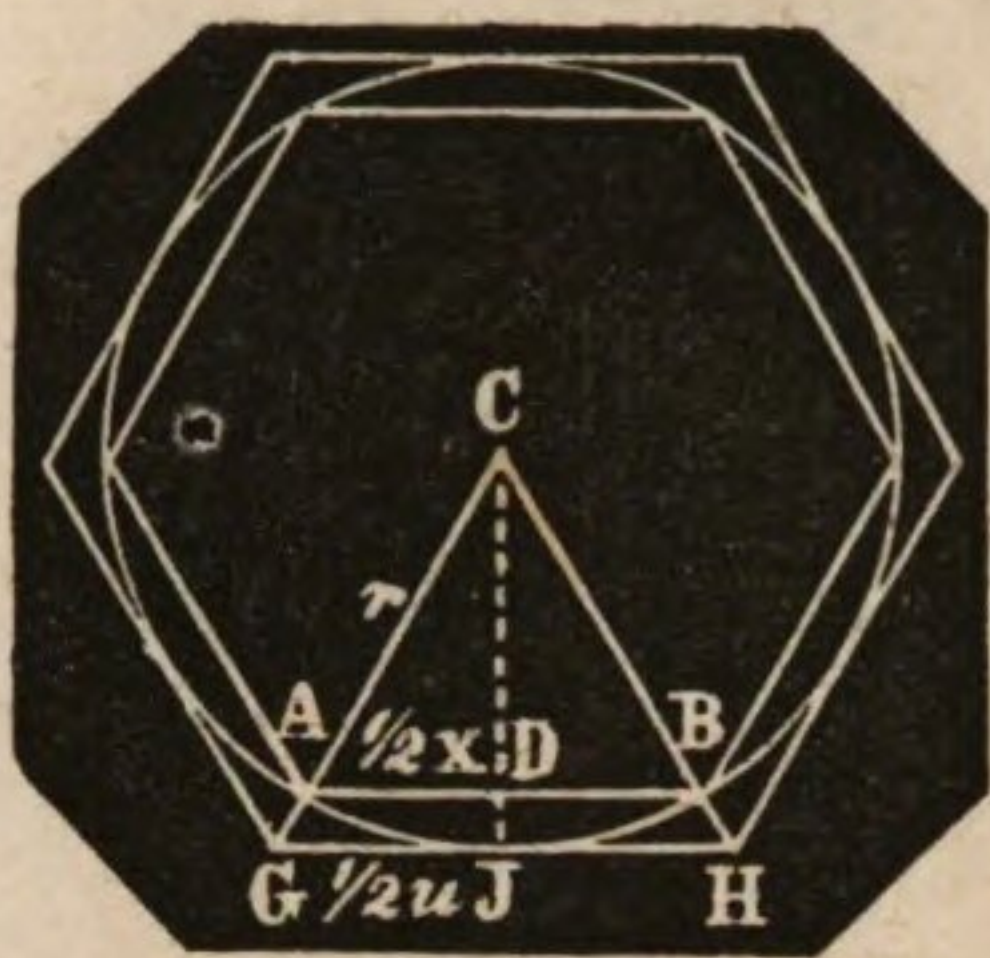
oder auch $A=170^\circ 5' 58''$ (§ 23)



Dass die vollständige Auflösung hier zwei Winkel geben muss, ist leicht einzusehen, weil die beiden Dreiecke CAB und CAD (wenn man $AD=AB$ nimmt), wegen gemeinschaftlicher Spitze C und gleicher Grundlinien, $AB=AD$, auch gleichen Inhalt haben. Der gesuchte Winkel A kann also sowohl $\widehat{BAC}=9^\circ 54' 2''$ als auch $\widehat{CAD}=170^\circ 5' 58''$ sein. Vergleiche Geometrie § 202.

25.

Aufgabe. Es ist der Radius eines Kreises, $AC=r$, gegeben. Man sucht die Seiten $AB=x$, und $GH=u$, der ein- und umgeschriebenen regelmässigen nEcke, so wie deren Inhalte f und F.



Auflösung. Es ist der Winkel $ACB = C = \frac{360}{n}$, daher: $\frac{\frac{1}{2}x}{r} = \sin \frac{1}{2}C$ und

$$\frac{GJ}{CJ} = \frac{\frac{1}{2}u}{r} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}C; \text{ hieraus:}$$

$$x = 2r \sin \frac{1}{2}C \quad f = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin C$$

$$u = 2r \operatorname{tg} \frac{1}{2}C \quad F = n \cdot r^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}C$$

Sei z. B. $r = 1'$, $n = 7$ gegeben, so findet man:

$$C = 51^\circ 25' 42\frac{6}{7}''; \quad \frac{1}{2}C = 25^\circ 42' 51\frac{3}{7}''; \quad n \cdot \frac{1}{2}r^2 = \frac{7}{2} = 3,5; \quad n \cdot r^2 = 7.$$

$$\log \sin \frac{1}{2}C = 9,6373733 - 10 \quad \log \sin C = 9,8931131 - 10$$

$$\dots\dots 2r = 0,3010300 \quad \dots\dots n \cdot \frac{1}{2}r^2 = 0,5440680$$

$$\dots\dots x = 0,9384033 - 1 \quad \dots\dots f = 0,4371811$$

$$x = 0,8677674 \quad f = 2,73641$$

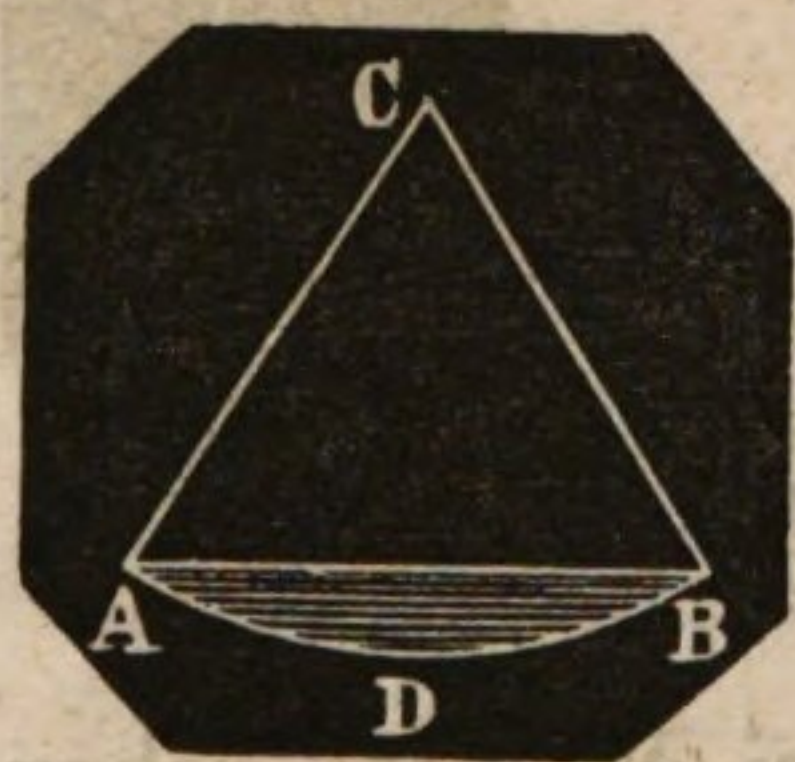
$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}C = 9,6826636 - 10 \quad \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}C = 9,6826636 - 10$$

$$\dots\dots 2r = 0,3010300 \quad \dots\dots n \cdot r^2 = 0,8450980$$

$$\dots\dots u = 0,9836936 - 1 \quad \dots\dots F = 0,5277616$$

$$u = 0,96315 \quad F = 3,371021$$

26.



Aufgabe. Gegeben: $AC = r = 12',5$
 $C = 42^\circ 13' = 42^\circ,21667$. Man sucht die Fläche des Kreisabschnitts $ADB = F$?

Auflösung. Die Fläche des Ausschnitts

ist $= r^2 \pi \frac{C}{360}$ und die des Dreiecks $= \frac{1}{2}r^2 \sin C$

(§ 21), mithin die Fläche des Abschnitts:

$$F = r^2 \pi \frac{C}{360} - \frac{1}{2}r^2 \sin C$$

$$\log r^2 = 2,1938200 \quad \log \sin C = 9,8273279 - 10$$

$$\dots\dots \pi = 0,4971499 \quad \dots\dots r^2 = 2,1938200$$

$$\dots\dots C = 1,6254840 \quad \dots\dots 0,5 = 0,6989700 - 1$$

$$4,3164539 \quad \dots\dots \frac{1}{2}r^2 \sin C = 1,7201179$$

$$\dots\dots 360 = 2,5563025 \quad \frac{1}{2}r^2 \sin C = 52,495$$

$$\dots\dots r^2 \pi \frac{C}{360} = 1,7601514$$

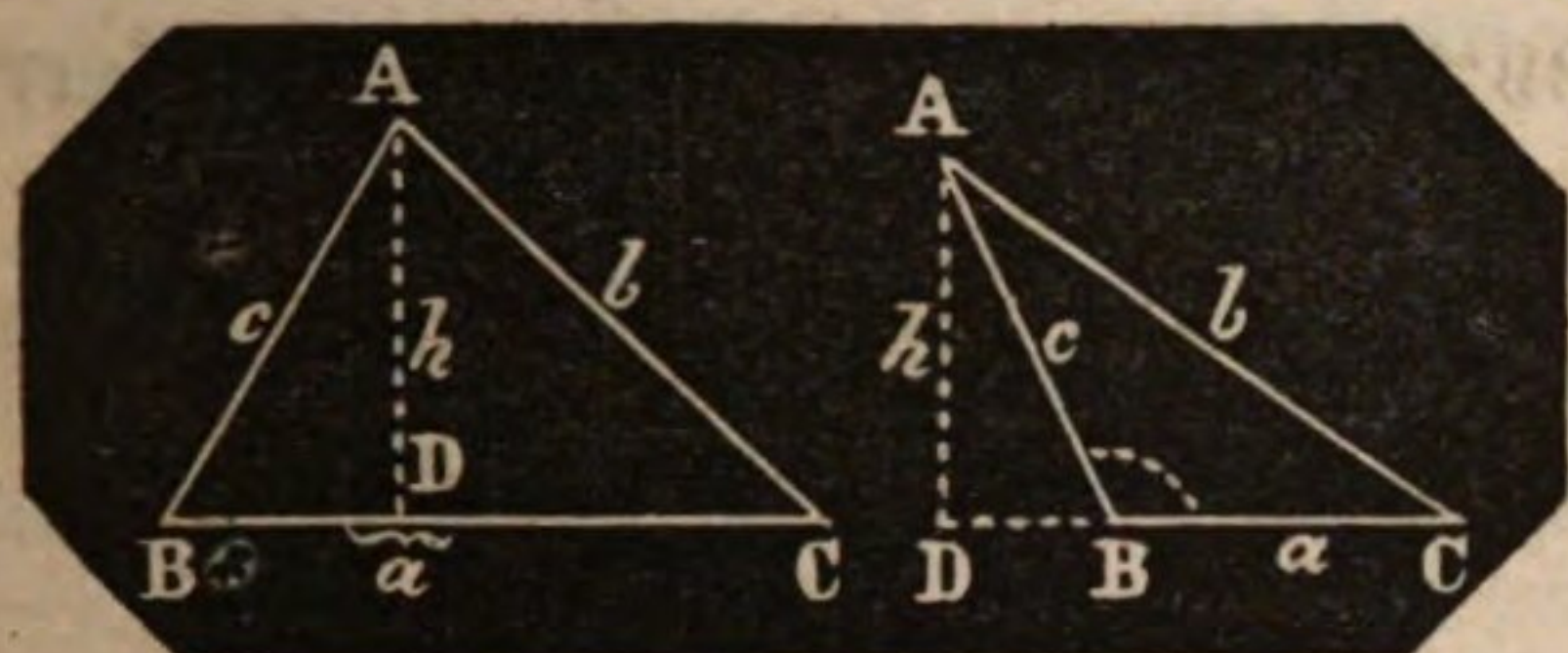
$$r^2 \pi \frac{C}{360} = 57,56405$$

$$F = 5,06905 \square'$$

Viertes Buch.

Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

27.



Lehrsatz. In jedem Dreieck verhalten sich je zwei Seiten zu einander wie die *sinus* der gegenüberliegenden Winkel.*)

Beweis. Man denke das Perpendikel $AD = h$ gefällt, so hat man aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken ADB und ADC:

$$\left. \begin{aligned} \frac{h}{c} &= \sin B \dots (1) \\ \frac{h}{b} &= \sin C \dots (2) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{dividirt man (1) durch (2),} \\ &\text{so folgt:} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

Da die *sinus* zweier Nebenwinkel, zufolge des § 21 erweiterten Begriffs, einander gleich sind, so ist der hier ausgesprochene wichtige Satz: dass sich in jedem Dreieck die Seiten wie die *sinus* der gegenüber liegenden Winkel verhalten, allgemein gültig, das Dreieck möge spitzwinklig oder stumpfwinklig sein, denn die beiden Gleichungen (1) und (2) gelten sowohl für Fig. 2 als für Fig. 1. — Denkt man noch vom Winkel C ein Perpendikel auf die gegenüber liegende Seite c (oder deren Verlängerung Fig. 2) gefällt, so findet man durch gleiche Schlüsse:

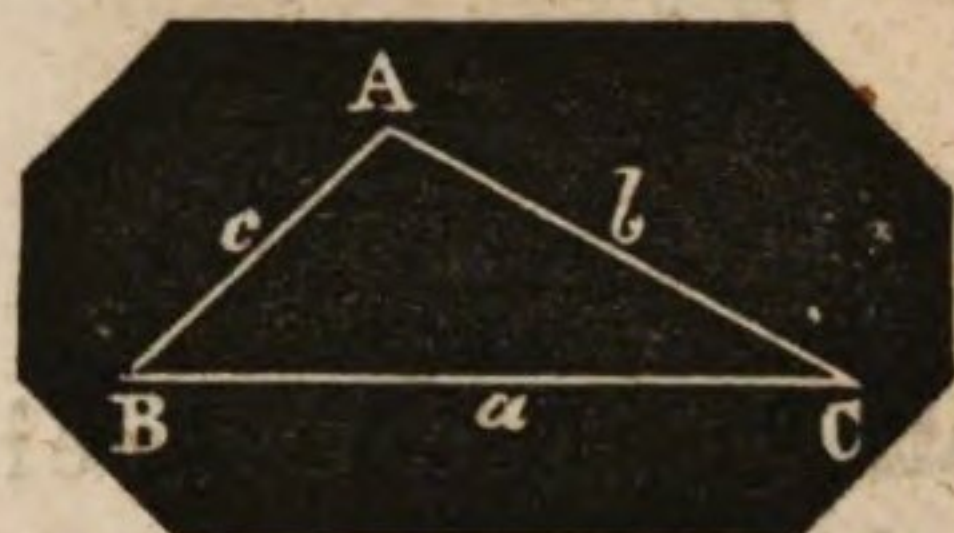
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \text{ mithin ist allgemein:}$$

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

*) Es ist üblich, die Seiten eines Dreiecks mit kleinen und die gegenüber liegenden Winkel mit den gleichnamigen grossen Buchstaben zu bezeichnen.

Diese sogenannte *Sinus*-Regel wird immer angewandt, wenn von einem Dreieck eine Seite und zwei Winkel, oder zwei Seiten und ein gegenüber liegender Winkel gegeben sind, mithin jedesmal, wenn eine Gleichung zwischen vier Stücken, die paarweise gegenüber liegen, gesucht wird.

28.



Aufgabe. Von einem Dreiecke, ABC, sind eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben, z. B. $a = 2057',8$, $B = 54^\circ 17' 12''$, $C = 41^\circ 39' 10''$. Man sucht die beiden andern Seiten b , c und den Flächeninhalt F ?

Auflösung. Zuerst findet man den dritten Winkel $A = 180 - (B + C) = 84^\circ 3' 38''$; dann, nach der *Sinus*-Regel:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$b = a \frac{\sin B}{\sin A}$$

$$c = a \frac{\sin C}{\sin A}$$

$$\log \sin B = 9,9095280 - 10$$

$$\dots a = 3,3134032$$

$$\underline{13,2229312 - 10}$$

$$\dots \sin A = 9,9976624 - 10$$

$$\dots b = 3,2252688$$

$$b = 1679,843$$

$$\log \sin C = 9,8225700 - 10$$

$$\dots a = 3,3134032$$

$$\underline{13,1359732}$$

$$\dots \sin A = 9,9976624$$

$$\dots c = 3,1383108$$

$$c = 1375,025$$

Um den Inhalt F zu erhalten, suche man erst das von der Spitze A auf die Grundlinie a gefällte Perpendikel h . Weil $\frac{h}{b} = \sin C$, so ist: $h = b \sin C$, und da, wie vorhin gefunden:

$b = a \frac{\sin B}{\sin A}$, so ist auch: $h = a \frac{\sin B}{\sin A} \sin C$, mithin ist:

$$F = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}$$

$$\log \sin B = 9,9095280 - 10$$

$$\dots \sin C = 9,8225700 - 10$$

$$\dots a^2 = 6,6268064$$

$$\dots 0,5 = 0,6989700 - 1$$

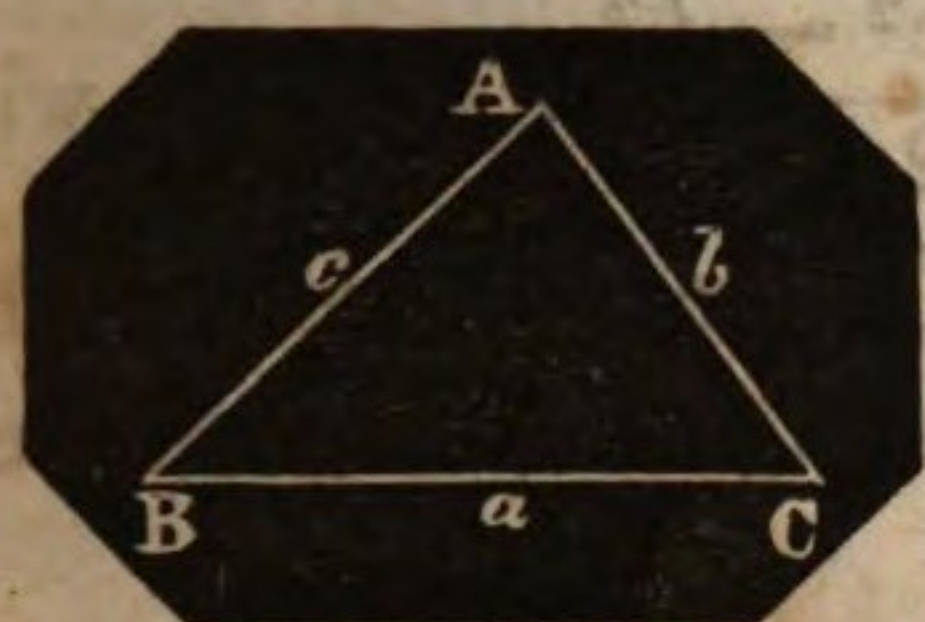
$$\underline{27,0578744 - 21}$$

$$\dots \sin A = 9,9976624 - 10$$

$$\dots F = 6,0602120$$

$$F = 1148714 \square'$$

29.



Aufgabe. Von einem Dreieck, ABC, sind zwei Seiten b, c und ein der grössern Seite c gegenüber liegender Winkel, C, gegeben. Man sucht die übrigen Stücke.

Auflösung. Man suche zuerst den, der kleinern Seite b gegenüber liegenden Winkel B. Nach der *Sinus*-Regel ist:

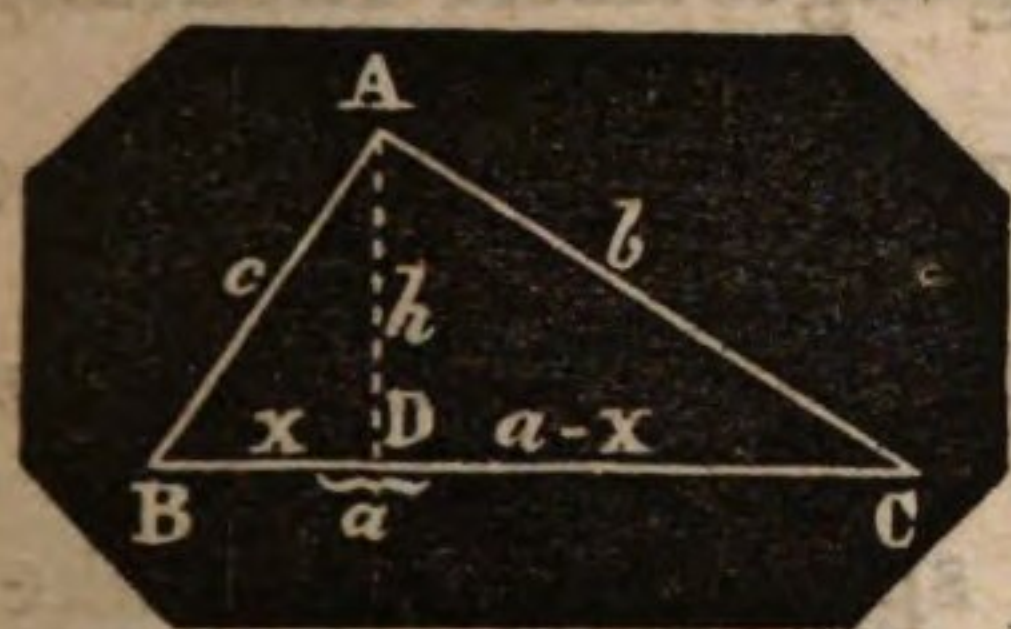
$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c}$$

$$\sin B = \frac{b}{c} \sin C$$

Weil $b < c$, so muss auch $B < C$, mithin Winkel B jedenfalls spitz sein. (Geometrie §§ 55 und 56.) Ferner hat man nun $A = 180 - (B + C)$, und dann:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \text{ woraus: } a = b \frac{\sin A}{\sin B}$$

30.



Lehrsatz. In jedem Dreieck ist der *cosinus* eines Winkels gleich den Quadratenderbeidenihneinschliessenden Seiten, weniger dem Quadrate der ihm gegenüber liegenden Seite, dividirt durch das doppelte

Product der beiden ihn einschliessenden Seiten.*)

Es ist z. B. in Bezug auf den Winkel B:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

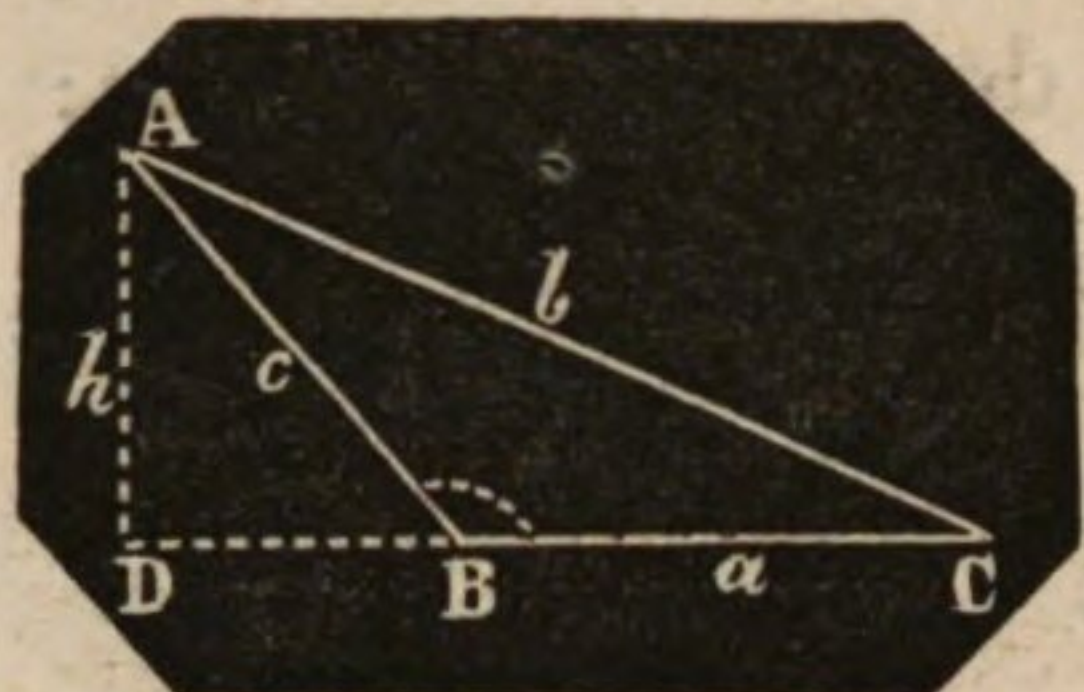
Beweis. Denkt man das Perpendikel $AD = h$ gefällt, und setzt $BD = x$, also $DC = a - x$, so hat man: $h^2 = c^2 - x^2$ und auch $h^2 = b^2 - (a - x)^2$; mithin: $b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$. Aus dieser Gleichung folgt: $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$. Dividirt man diesen für

x gefundenen Ausdruck durch c und bedenkt, dass $\frac{x}{c} = \cos B$ (§ 2), so erhält man obige Formel.

*) Dieser Satz, die sogenannte *Cosinus*-Regel, ist wichtig und deshalb dem Gedächtniss wohl einzuprägen.

Anmerkung. Der Ausdruck $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ giebt an, wie weit der Fusspunkt D des Perpendikels AD von B gegen C hin fällt. Wäre z. B. $a = 8'$, $b = 6'$, $c = 4'$, so wäre $x = \frac{44}{16}$, und es wäre dann: $\cos B = \frac{11}{16}$.

Ist der Winkel B ein stumpfer (Fig. 2), so fällt das Loth AD ausserhalb des Dreiecks auf die rückwärts verlängerte Linie BC, und es ist dann $b^2 > a^2 + c^2$. Obiger, für den Abstand des Punctes D von B gefundene Ausdruck: $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$, gilt aber auch



für diesen Fall, wenn man nur das Vorzeichen des Resultats, welches hier negativ wird, richtig deutet. Wäre z. B. $a = 8'$, $b = 12'$, $c = 6'$, so wäre $x = -\frac{11'}{4}$. Das Minuszeichen deutet hier

nun an, dass der Fusspunkt D des Perpendikels nicht, wie bei der Ableitung der Formel $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ vorläufig angenommen, in

der Richtung BC, sondern in gerade entgegengesetzter Richtung BD um $\frac{11'}{4}$ von B entfernt liegt.*)

Nimmt man aber diese negative Grösse $x = -DB$ als positiv und dividirt durch c , so ist der Quotient $\frac{DB}{c}$ der *cosinus* von dem spitzen Nebenwinkel

ABD, durch dessen Subtraction von 180° der fragliche stumpfe Winkel B bestimmt wird. Der erste Begründer der Trigonometrie kam deshalb auf den nahe liegenden Gedanken: auch den Begriff des *cosinus* zu erweitern und auf stumpfe Winkel auszudehnen, nämlich: der *cosinus* eines stumpfen Winkels ist an Grösse gleich dem *cosinus* des Nebenwinkels, aber negativ, z. B. (Fig. 2) $\cos \widehat{ABC} = -\cos \widehat{ABD}$.

31.

Mit dieser Erweiterung des Begriffs *cosinus* umfasst also die vorhin aufgestellte Formel: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, beide Fälle, der Winkel B möge spitz oder stumpf sein. Giebt die Formel ein

*) Vergleiche, wegen dieses, für den Anfänger schwierigen Punctes, Algebra § 126.

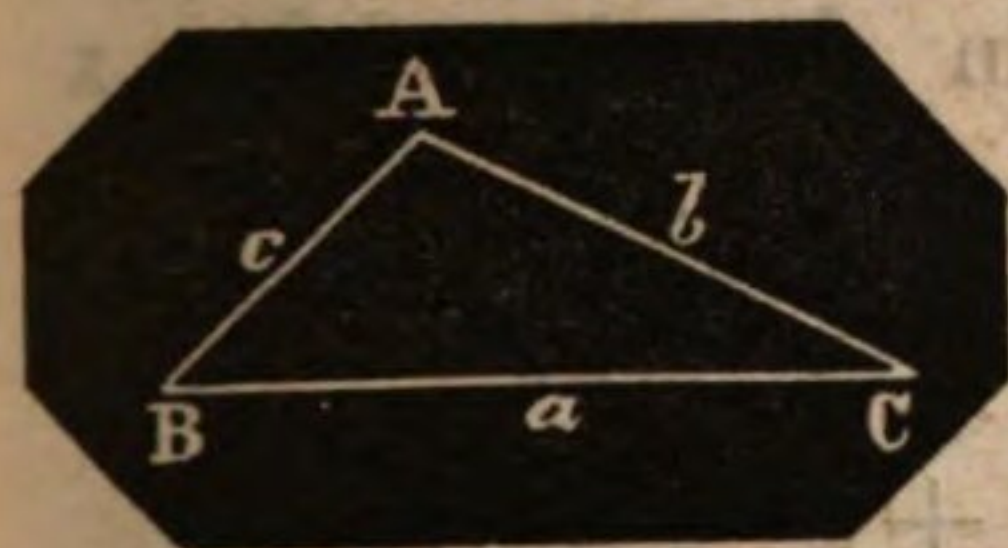
positives Resultat, so schlägt man den dazu gehörigen spitzen Winkel unmittelbar in den Tafeln auf. Giebt die Formel ein negatives Resultat, so sehe man es vorläufig als positiv an, suche den dazu gehörigen spitzen Winkel in den Tafeln und subtrahire denselben von 180° .

32.

Es folgt hieraus zugleich, dass es nicht nöthig war, auch die stumpfen Winkel in die Tafeln aufzunehmen, indem diese durch ihre Nebenwinkel bestimmt sind, und da nach Ableitung und Festsetzung der Begriffe die *sinus* zweier Nebenwinkel vollkommen gleich sind und eben so die *cosinus* zweier Nebenwinkel gleich gross und nur entgegen gesetzt sind, so folgt, dass man auch mit Hülfe der Tafeln den *cosinus* eines stumpfen Winkels findet, indem man ihn nur von seinem spitzen Nebenwinkel, aber mit dem *Minus*-Zeichen (negativ) nimmt. Es ist z. B. $\cos 120^\circ = -\cos(180 - 120) = -\cos 60^\circ$; eben so hat man: $\cos 150^\circ = -\cos(180 - 150) = -\cos 30^\circ$. Allgemein, wenn a irgend einen spitzen oder stumpfen Winkel bedeutet:

$$\cos(180 - a) = -\cos a$$

33.



Aufgabe. Es sind alle drei Seiten eines Dreiecks gegeben: z. B. $a = 13$, $b = 10$, $c = 7$. Man sucht die Winkel.

Auflösung. Nach § 30 hat man:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{169 + 49 - 100}{2 \cdot 13 \cdot 7} \quad \text{oder:}$$

$$\cos B = \frac{118}{182}$$

$$\log 118 = 2,0718820$$

$$\dots 182 = 2,2600714$$

$$\dots \cos B = 9,8118106 - 10$$

Eben so hat man § 30:

$$B = 49^\circ 34' 57'', 3$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{169 + 100 - 49}{2 \cdot 13 \cdot 10} \quad \text{oder:}$$

$$\log 220 = 2,3424227$$

$$\dots 260 = 2,4149733$$

$$\cos C = \frac{220}{260}$$

$$\dots \cos C = 9,9274494 - 10$$

$$C = 32^\circ 12' 15'', 1$$

Ferner § 30:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{100 + 49 - 169}{2 \cdot 10 \cdot 7}$$

$$\cos A = -\frac{20}{140}$$

$$A = 98^\circ 12' 47'', 6$$

$$B = 49^\circ 34' 57,3$$

$$C = 32^\circ 12' 15,1$$

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\log 20 = 1,3010300 (n)^*)$$

$$\cdot \cdot 140 = 2,1461280$$

$$\cdot \cdot \cos A = 9,1549020 - 10 (n)$$

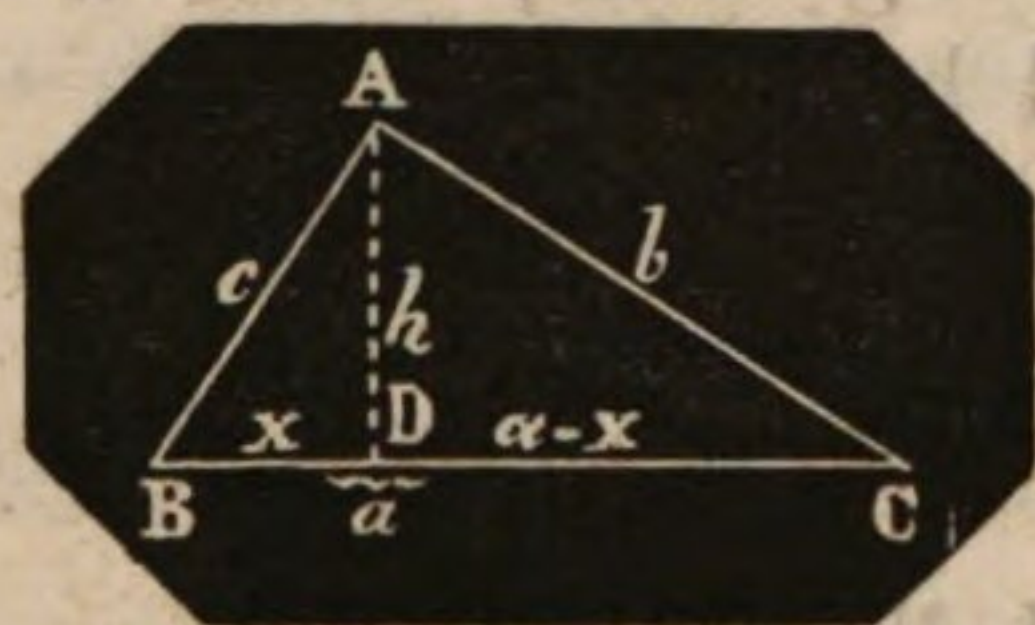
$$180 - A = 81^\circ 47' 12'', 4$$

$$A = 98^\circ 12' 47'', 6$$

34.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei gegebenen Seiten a, b, c eines Dreiecks den Flächeninhalt F desselben berechnen kann.

Auflösung. Obgleich diese Aufgabe in jedem Lehrbuche der Elementar-Geometrie schon vorkommt, so ist sie doch eine wirklich trigonometrische und darf deshalb hier nicht fehlen.



Setzt man die erst zu findende unbekannte Höhe des Dreiecks $AD = h$ und $BD = x$, so ist:

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x)$$

und wenn man hierin den § 30 für x gefundenen Ausdruck $\left(x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$ substituiert:

$$h^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$h^2 = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}$$

$$h^2 = \frac{(a + c)^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - (a - c)^2}{2a}$$

$$h^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)}{4a^2}$$

$$h = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}}{2a}$$

*) Das angehängte (n) bedeutet, dass die zu dem Logarithmen gehörige Zahl (20) negativ ist.

Multiplicirt man diesen für die Höhe gefundenen Ausdruck mit der halben Grundlinie $\left(\frac{a}{2}\right)$, so erhält man die merkwürdige und wichtige Formel für den Flächeninhalt, nämlich:

$$F = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Um sie für die numerische Rechnung noch etwas bequemer zu formen, setze man die Summe der drei Seiten $= s$, nämlich:

$$a+b+c = s = 2 \cdot \frac{1}{2}s, \text{ mithin:}$$

$$a+b-c = 2 \cdot \frac{1}{2}s - 2c = 2\left(\frac{1}{2}s - c\right)$$

$$a+c-b = 2\left(\frac{1}{2}s - b\right)$$

$$b+c-a = 2\left(\frac{1}{2}s - a\right).$$

Dies in obige Formel substituirt, kommt:

$$F = \sqrt{\frac{1}{2}s \left(\frac{1}{2}s - a\right) \left(\frac{1}{2}s - b\right) \left(\frac{1}{2}s - c\right)}$$

Es sei z. B.:

Gegeben:

so ist:

Logarithmen:

$$a = 13$$

$$\frac{1}{2}s = 15$$

$$1,1760913$$

$$b = 10$$

$$\frac{1}{2}s - a = 2$$

$$0,3010300$$

$$c = 7$$

$$\frac{1}{2}s - b = 5$$

$$0,6989700$$

$$s = 30$$

$$\frac{1}{2}s - c = 8$$

$$0,9030900$$

$$2) \overline{3,0791813}$$

$$\log F = 1,5395906$$

$$F = 34,641 \square'$$

35.

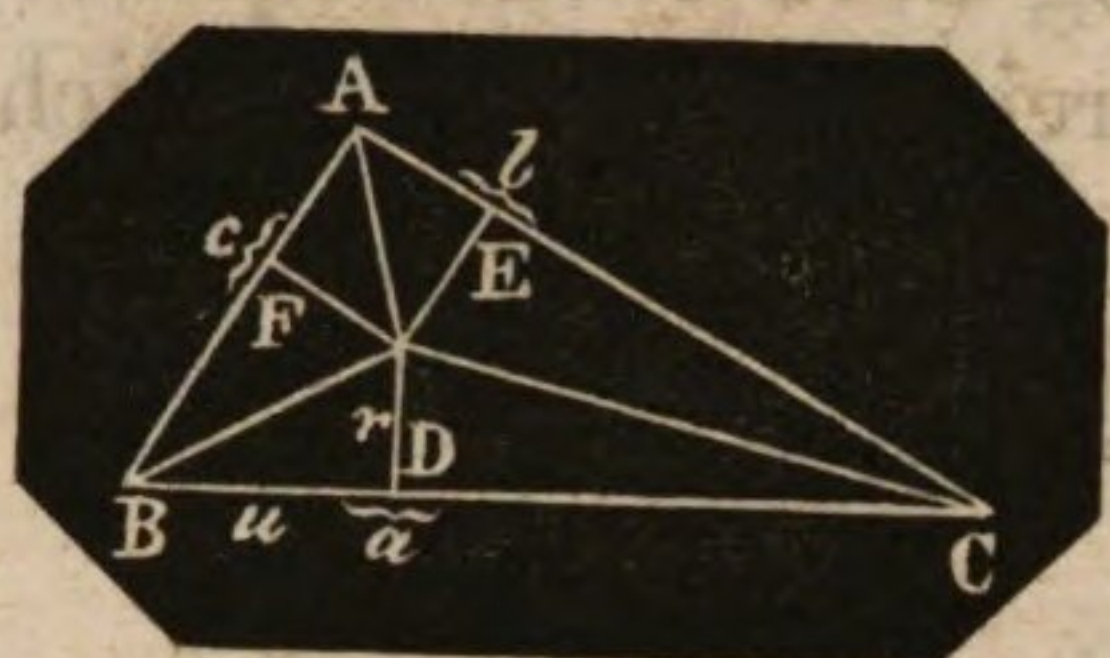
Obgleich die § 30 entwickelte Formel zur Berechnung eines Winkels aus den drei Seiten eines Dreiecks, die sogenannte *Cosinus*-Regel, theoretisch wichtig ist, so ist sie doch für die logarithmische Rechnung, wenn die Seiten durch grosse Zahlen gegeben sind, sehr unbequem, und wir wollen deshalb, für diesen rein practischen Zweck, noch eine besondere, für die numerische Rechnung bequemere Formel ableiten.

Denkt man sich die drei Winkel des Dreiecks halbt, vom gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der Halbierungslinien Perpendikel auf die drei Seiten gefällt, und bezeichnet diese gleichen Perpendikel mit r (Geometrie § 76), den als bekannt anzusehenden Flächeninhalt mit F , so hat man:

$$\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = F, \text{ woraus:}$$

$$r = \frac{2F}{a+b+c}$$

Setzt man noch $BD = u$, so ist (weil $BF = BD$, $AF = AE$ und $CE = CD$, also $CD + AF = AC = b$):



$$2u + 2b = a + b + c, \text{ hieraus:}$$

$$u = \frac{a + c - b}{2}$$

Nun ist $\operatorname{tg} \frac{1}{2}B = \frac{r}{u} = \frac{2F}{a+b+c} \cdot \frac{2}{a+c-b}$. Hierin für F seinen Werth aus vorhergehendem § gesetzt:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}B = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{(a+b+c)(a+c-b)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{(a+b+c)^2(a+c-b)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{(a+b+c)(a+c-b)}}$$

Oder, wenn man Kürze halber wieder, wie in § 34, $a+b+c=s$ setzt:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s-a)(\frac{1}{2}s-c)}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s-b)}}$$

Beispiel. Es sei wieder, wie in § 33:

gegeben:

so ist:

$$\log(\frac{1}{2}s-a) = 0,3010300$$

$$a = 13$$

$$\frac{1}{2}s$$

$$= 15$$

$$\cdots (\frac{1}{2}s-c) = 0,9030900$$

$$b = 10$$

$$\frac{1}{2}s - a$$

$$= 2$$

$$1,2041200$$

$$c = 7$$

$$\frac{1}{2}s - b$$

$$= 5$$

$$\log \frac{1}{2}s = 1,1760913$$

$$s = 30$$

$$\frac{1}{2}s - c$$

$$= 8$$

$$\cdots (\frac{1}{2}s-b) = 0,6989700$$

$$1,8750613$$

$$1,2041200$$

$$1,8750613$$

$$0,3290587 - 1 = 1,3290587 - 2, \text{ mithin:}$$

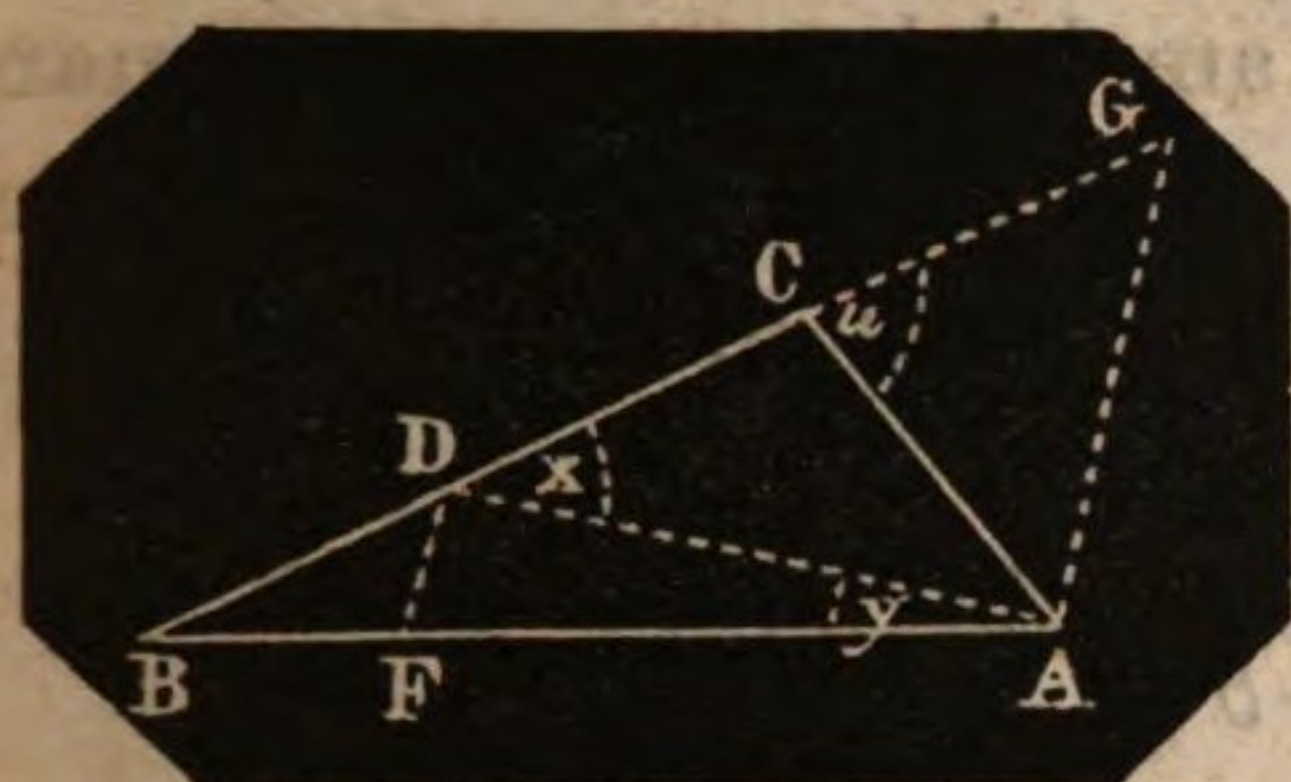
$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}B = 9,6645293 - 10, \text{ also } \frac{1}{2}B = 24^\circ 47' 28'', 6 \text{ u. } B = 49^\circ 34' 57,2.$$

Eben so findet man die Winkel A und C aus:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - b)(\frac{1}{2}s - c)}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s - a)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - b)}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s - c)}}$$

36.



Lehrsatz. In jedem Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrer Differenz, wie die *tangente* von der halben Summe der gegenüber liegenden Winkel zur *tangente* von der halben Differenz derselben.

In Zeichen:

$$a + b : a - b = \operatorname{tg} \frac{A + B}{2} : \operatorname{tg} \frac{A - B}{2}$$

Beweis. Man verlängere die grössere Seite $BC = a$ um die kleinere $AC = b$, so dass $BG = a + b$. Ferner nehme man $CD = CA = b$, so dass $BD = a - b$ ist, ziehe AG und AD , dann ist Winkel DAG ein rechter. (Geometrie § 81.) Zieht man noch $DF \parallel GA$, so ist auch Winkel ADF ein rechter. Ferner ist nun der Aussenwinkel $u = A + B$ (indem $\widehat{BAC} = A$ gesetzt); es ist aber auch $u = 2x$ (weil $\widehat{CAD} = x$), mithin:

$x = \frac{A + B}{2}$, dann ist auch $x = y + B$, woraus $y = x - B$, oder

$y = \frac{A + B}{2} - B$, d. i. $y = \frac{A - B}{2}$. Im rechtwinkligen Dreieck ADF

ist nun $\operatorname{tg} y = \frac{DF}{AD}$ ··· (1) und in dem rechtwinkligen Dreiecke

DAG ist: $\operatorname{tg} x = \frac{AG}{AD}$ ··· (2). Die Division der beiden Gleichungen

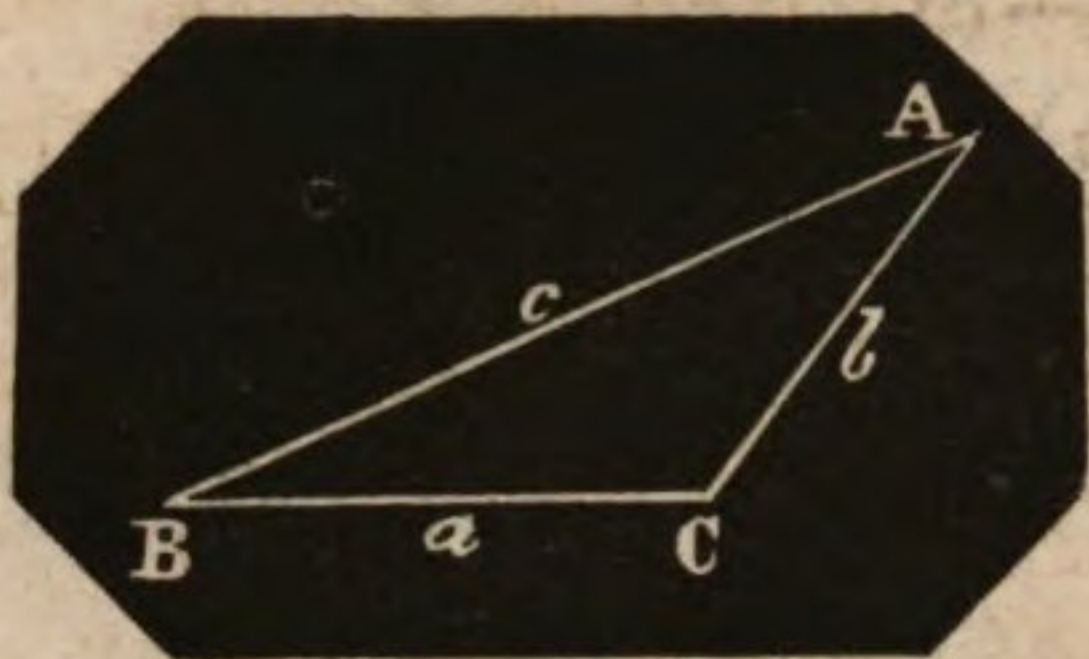
(1) und (2) giebt: $\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} = \frac{DF}{AG}$ oder (weil $\frac{DF}{AG} = \frac{BD}{BG}$ (Geometrie

§ 117)), auch $\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} = \frac{BD}{BG}$. Setzt man nun statt x, y, BD, BG ,

ihre Werthe, so folgt der obige Lehrsatz, nämlich:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A - B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A + B}{2}} = \frac{a - b}{a + b}$$

37.



Aufgabe. Von einem Dreieck sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, z. B. $a = 30500,67$; $b = 21111,39$; $C = 109^\circ 13' 48''$; man suche die übrigen Stücke.

Auflösung. Die Rechnung wird am leichtesten, wenn man erst die beiden andern Winkel A, B, und dann die dritte Seite sucht. Der eben bewiesene Satz (§ 36) giebt uns:

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$$

Nach dieser Formel findet man, da $\frac{A+B}{2}$ bekannt ist, $\frac{A-B}{2}$, dann aus der halben Summe und halben Differenz, die Winkel A und B selbst. Es ist nämlich:

$$\frac{A+B}{2} = 90 - \frac{1}{2}C = 35^\circ 23' 6''; \quad a+b = 51612,06; \quad a-b = 9389,28$$

$\log \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} = 9,8514229 - 10$	$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 35^\circ 23' 6''$
$\dots\dots (a-b) = 3,9726323$	$\frac{A}{2} - \frac{B}{2} = 7,21,45$
$\frac{3,8240552}{\dots\dots (a+b) = 4,7127512}$	$A = 42^\circ 44' 51''$
$\dots \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = 9,1113040 - 10$	$B = 28^\circ, 1', 21''$

Die Seite c findet man jetzt nach der *Sinus*-Regel:

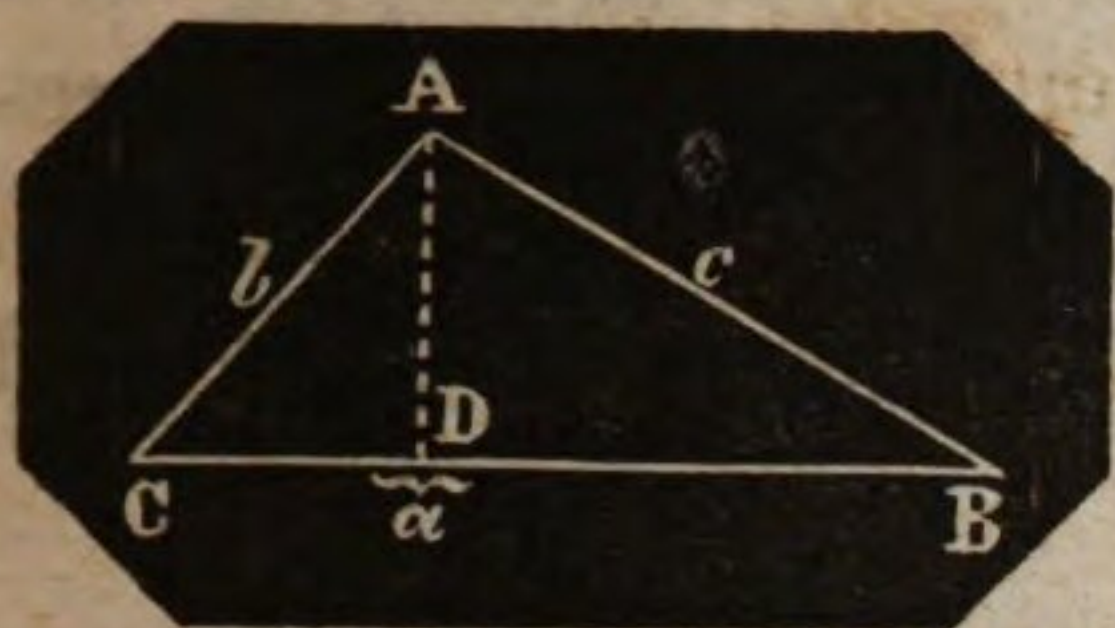
$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$	$\log \sin C = 9,9750658 - 10$
$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$	$\dots \dots \dots = 4,4843094$
	$\frac{4,4593752}{\log \sin A = 9,8317217 - 10}$
	$\dots \dots \dots c = 4,6276535$
	$c = 42428,08$

Um noch den Flächeninhalt zu finden, denke man von A auf a das Perpendikel h gefällt, so ist $h = b \sin C$, daher:

$$F = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$

$$F = 303991970 \square'$$

38.



Will man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel a, b, C die übrigen Stücke ganz direct berechnen, so kann man auch das, aber die Formeln fallen für die numerische Rechnung sehr unbequem aus, weshalb man sie auch

in der Regel nicht anwendet, sondern wie in § 37 verfährt.

1) Zur directen Bestimmung der Seite c folgt aus der *Cosinus-Regel* (§ 30), $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, indem man diese Formel auf c reducirt.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

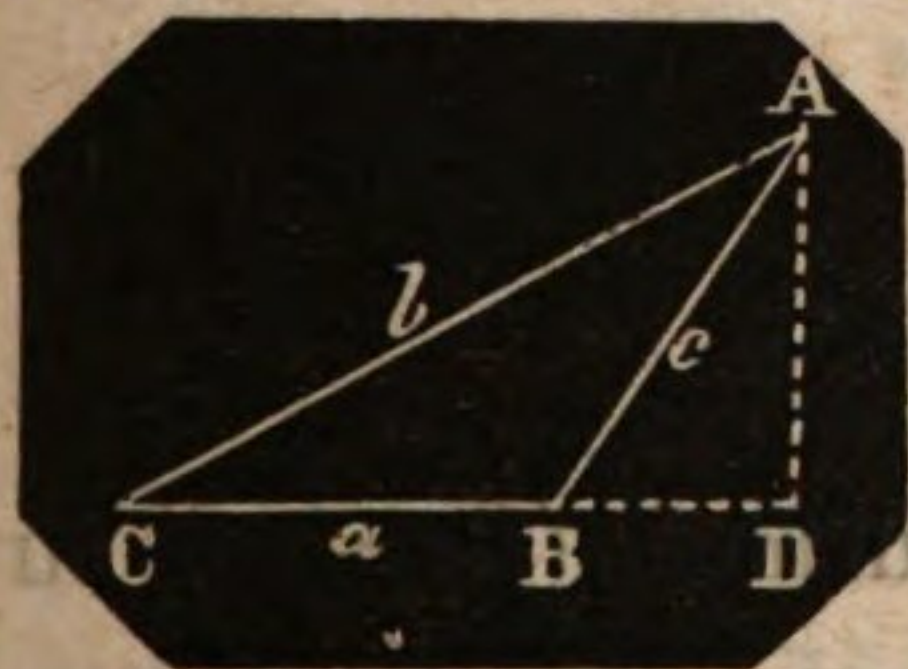
wobei aber das Vorzeichen von $\cos C$ zu berücksichtigen ist. Ist der Winkel C spitz, so wird das Product $2ab \cos C$ von $a^2 + b^2$ subtrahirt, dagegen aber addirt, wenn der Winkel C stumpf ist.

2) Zur Bestimmung des Winkels B hat man (das Perpendikel AD gefällt), $\operatorname{tg} B = \frac{AD}{BD}$ oder, da $AD = b \sin C$ und $CD = b \cos C$, also $BD = a - b \cos C$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C}$$

$$\text{oder: } \cot B = \frac{a - b \cos C}{b \sin C}$$

wobei wieder das Vorzeichen von $\cos C$ zu beachten ist. Wäre



der zu bestimmende Winkel B stumpf, so fällt das Perpendikel AD ausserhalb des Dreiecks. In diesem Fall ist dann $CD = b \cos C > a$ und deshalb in obigen Formeln die Grösse: $a - b \cos C = BD$, in sich negativ.

Nimmt man aber, während der Rechnung,

BD als positiv, so geben die obigen Formeln die *tang* und *cot* des Nebenwinkels, durch dessen Subtraction von 180° man den gesuchten stumpfen Winkel B hat. Damit also obige Formeln beide Fälle zugleich umfassen, dringt sich hier wieder die Nothwendigkeit auf, auch die Begriffe der *tangente* und *cotangente*

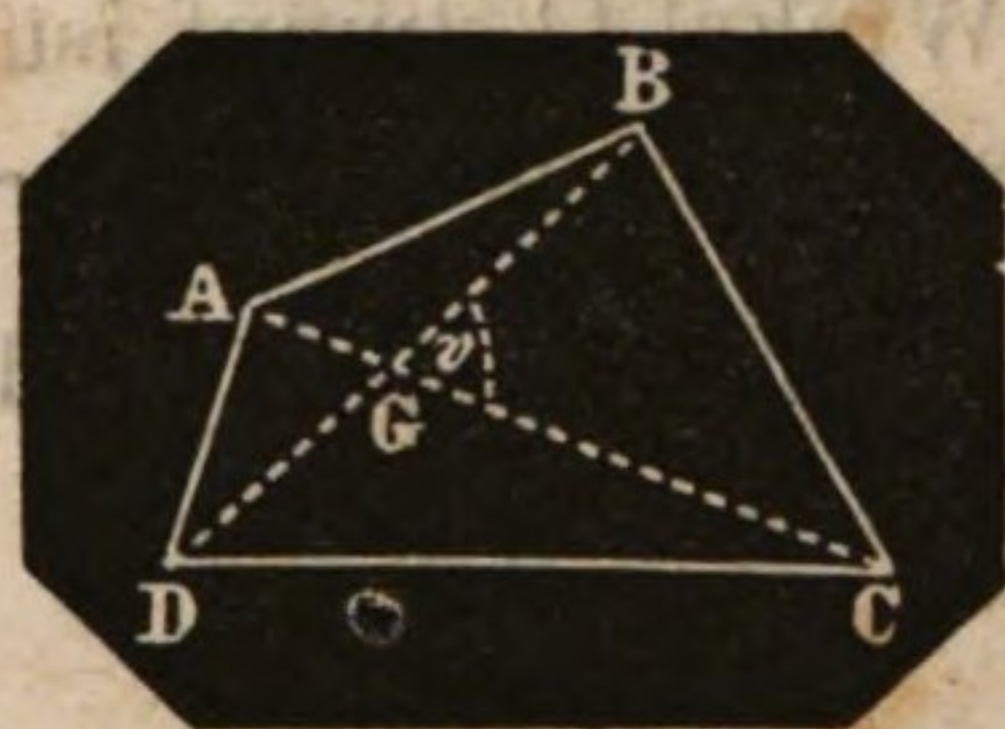
zu erweitern und auch auf stumpfe Winkel auszudehnen, so dass also die *tangenten* und ebenso die *cotangenten* zweier Nebenwinkel an Grösse vollkommen gleich, aber entgegengesetzt, nämlich von stumpfen Winkeln negativ sind. Es ist z. B. $\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ$; $\operatorname{cot} 120^\circ = -\operatorname{cot} 60^\circ$. Allgemein, wenn a irgend einen Winkel bedeutet:

$$\operatorname{tg}(180 - a) = -\operatorname{tg} a$$

$$\operatorname{cot}(180 - a) = -\operatorname{cot} a$$

Und hiemit ist die eigentliche ebene Trigonometrie, welche nur die Regeln verlangte, aus gegebenen Bestimmungsstücken eines Dreiecks, die dadurch bestimmten, nicht durch Zeichnung, sondern durch Rechnung zu finden, vollständig entwickelt.

39.



Aufgabe. Es sind die beiden Diagonalen eines Vierecks gegeben $AC = d$, $BD = d'$, so wie der Winkel v , den sie mit einander bilden; man soll hieraus den Flächeninhalt des Vierecks bestimmen.

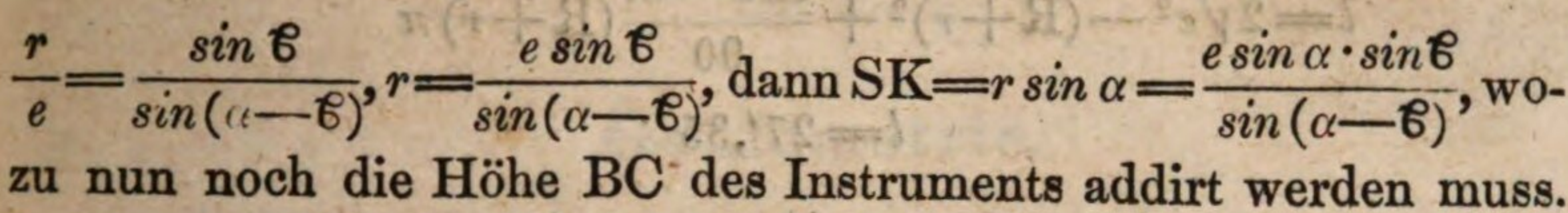
Auflösung. Denkt man von B und D auf $AC = d$ die Perpendikel p und p' gefällt, so ist erstlich $p = BG \sin v$ und $p' = DG \sin v$, mithin $F = \frac{1}{2} d \cdot BG \sin v + \frac{1}{2} d \cdot DG \sin v$ und hieraus, weil $BG + DG = d'$:

$$F = \frac{1}{2} dd' \sin v$$

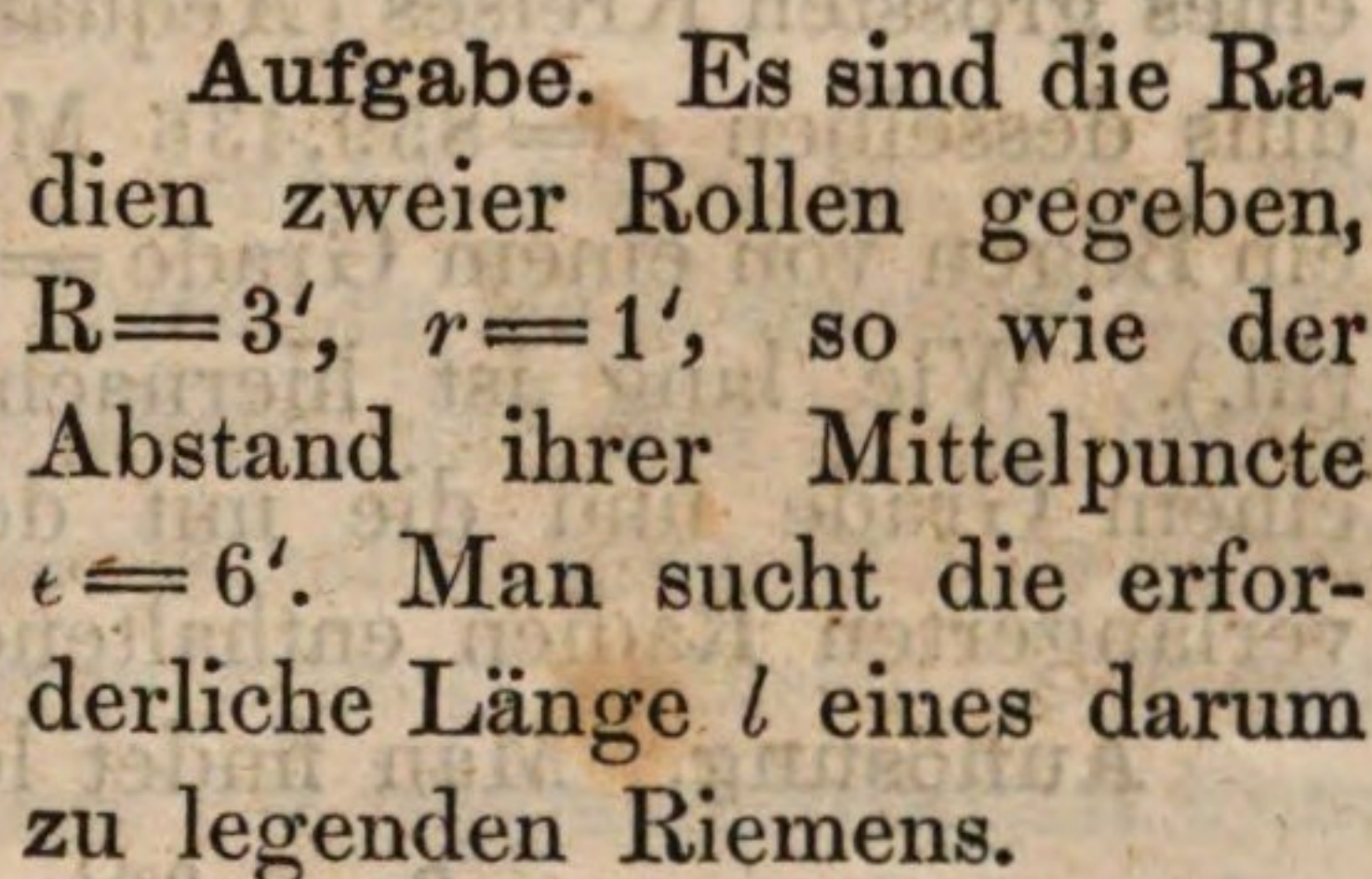
40a.

Aufgabe. Die Höhe $SH = h$ eines Thurmes (Berges) zu bestimmen.

Auflösung. Man messe zuerst eine horizontale Standlinie $\overline{AB} = e$, und dann mittelst eines Winkelmessers, dessen Limbus vertical gestellt werden kann die beiden Winkel α und ϵ , dann ist der Winkel bei S $= \alpha - \epsilon$, und man hat zuerst aus:



40 b.

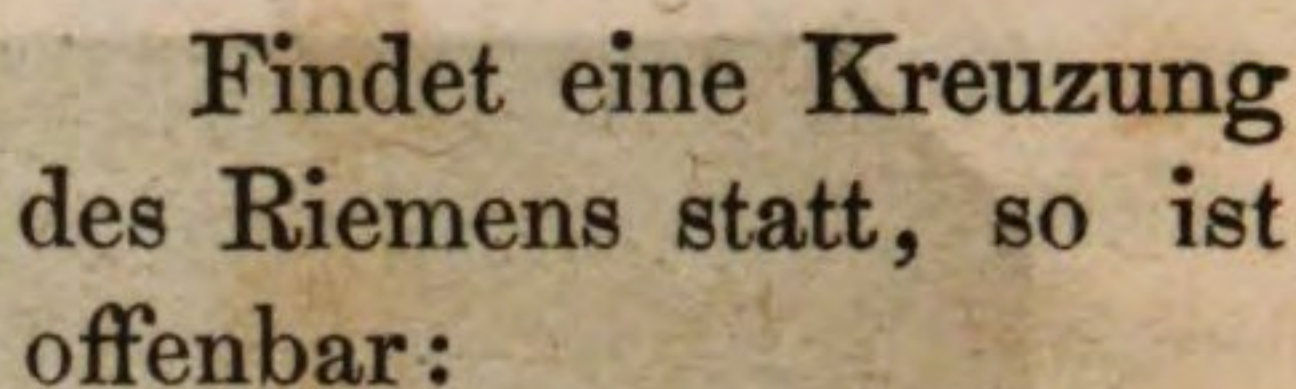


men in den Endpunkten der beiden umschlungenen Bögen die Rollen berührt, so sind die Winkel bei T, t rechte. Zieht man $OA \parallel tT$, so ist $CA = R - r$ und man hat zur Bestimmung des unbekannten Winkels m :

$$m = 70^{\circ}31'43'',6.$$

$$l = 2e \cdot \sin m + \frac{m}{90} \cdot r \pi + \frac{180 - m}{90} \cdot R \pi$$

$$l = 25', 24.$$



$$m = 48^{\circ} 11' 23''$$

$$l = 27',35$$

40 c.

Auflösung. Man findet leicht:

$$T = 2r \operatorname{tg} 30' = 15,00038 \quad ,,$$

40 d.

Antwort. Man hat hier

$$s = \frac{2r\pi}{360} \cdot \cos b = 15 \cos b = 9,027 \text{ Meilen.}$$

Fünftes Buch.

Goniometrie.

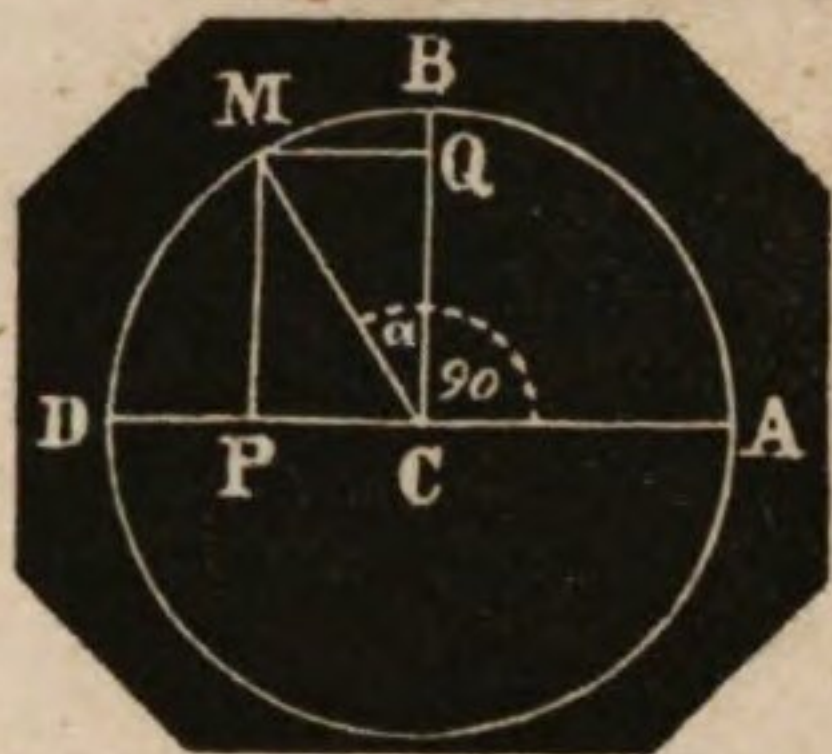
41.

Jede mathematische Wissenschaft enthält schon in sich, und ohne dass die ersten Begründer derselben sie absichtlich hineingelegt hätten, die Keime zu einer neuen, und dies ist der Grund, weshalb die mathematischen Wissenschaften niemals zum eigentlichen Schlusse kommen, sondern immerfort wachsen. Der erste Begründer der Trigonometrie hatte die trigonometrischen Functionen *sin*, *cos*, etc. ursprünglich nur zu dem Zwecke berechnet, um durch ihre Vermittelung die in den beiden vorhergehenden Büchern aufgestellten trigonometrischen Probleme zu lösen, welches auch nach den dort gegebenen allgemeinen Regeln vollkommen geschehen ist.

Es konnte nun aber wohl nicht lange unbemerkt bleiben, dass unter den trigonom. Functionen eines oder auch mehrerer Winkel merkwürdige Beziehungen stattfinden, deren Kenntniss nicht allein die eigentliche Trigonometrie unterstützt und erleichtert, sondern auch in anderen, namentlich höhern Theilen der Mathematik, ja selbst bei rein arithmetischen Untersuchungen von grosser Wichtigkeit ist. Der Inbegriff dieser Beziehungen oder Formeln bildet für sich einen eigenen Theil der Trigonometrie, welchen man Goniometrie nennt, und wir wollen nun die practisch wichtigsten Sätze derselben, welche das Bedürfniss nach und nach zu entdecken genöthigt hat, hier erst einzeln mittheilen und sie dann, zur leichtern Uebersicht und Nach-

schlagung, in § 100 zusammenstellen. Um Gewandtheit in den vielfachen Anwendungen der Goniometrie zu erlangen, ist es durchaus erforderlich, die mit einem Sternchen bezeichneten Formeln auswendig zu wissen.

42.



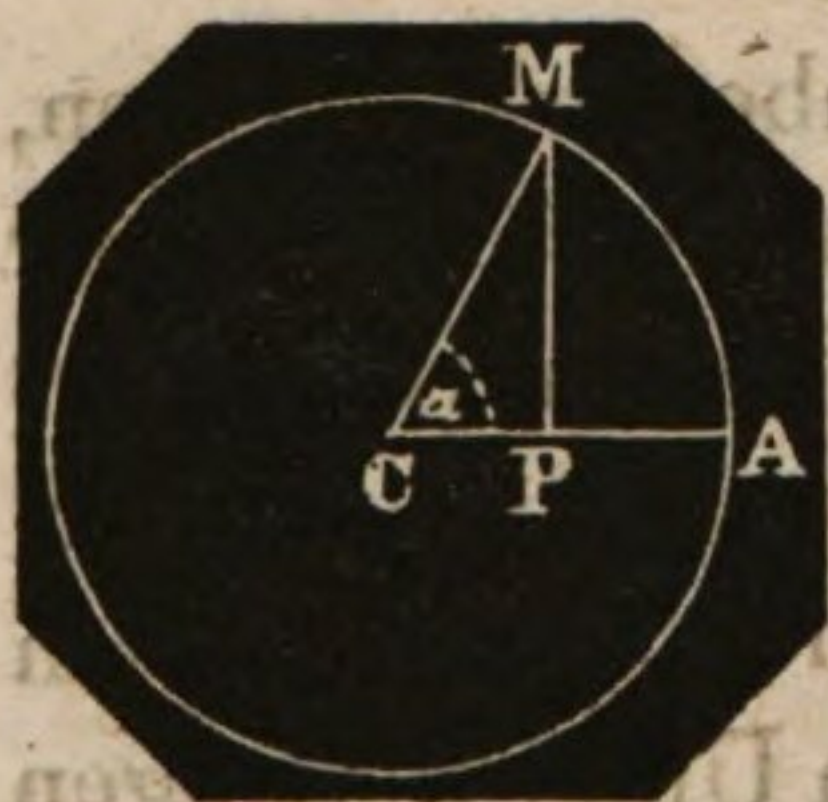
Es sei ein stumpfer Winkel $MCA, = 90 + a$, dann ist, $CM = 1$ gesetzt, $MP = \sin(90 + a)$ (§ 6) und CP negativ genommen, $= \cos(90 + a)$ (§ 32), da aber $MP = CQ$ und (für $CM = 1$), $CQ = \cos a$, ferner $CP = MQ$ und $MQ = \sin a$, so haben wir hier die zwei in der Folge als Beweismittel dienenden kleinen Formeln:

$$\sin(90 + a) = \cos a$$

$$\cos(90 + a) = -\sin a$$

Anmerkung. Diese Formeln haben für den, der viel mit Zahlen rechnet, auch noch einen practischen Nutzen. Soll man nämlich zu einem stumpfen Winkel den *log sinus* oder *log cosinus* in den Tafeln aufschlagen, so kann man, anstatt den stumpfen Winkel erst von 180° zu subtrahiren, viel leichter 90° von dem Winkel subtrahiren und zu dem Reste die sinnverwandte Function suchen. Es ist z. B. $\sin 124^\circ 13' 24'' = \cos 34^\circ 13' 24''$ und $\cos 124^\circ 13' 24'' = -\sin 34^\circ 13' 24''$.

43.



Lehrsatz. Bedeutet a einen beliebigen Winkel, spitz oder stumpf, so finden unter seinen trigonometrischen Functionen folgende vier wichtige Beziehungen Statt. Es ist nämlich immer:*)

$$* 1) \sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$* 3) \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$$

$$* 2) \operatorname{tg} a \cdot \cot a = 1$$

$$* 4) \frac{\cos a}{\sin a} = \cot a$$

*) Statt $\sin a \cdot \sin a$ schreibt man $\sin^2 a$ oder $\sin a^2$.

Beweis. Es ist:

$$\sin a = \frac{MP}{CM}, \text{ also } \sin^2 a = \frac{\overline{MP}^2}{\overline{CM}^2} \dots\dots (1)$$

$$\cos a = \frac{CP}{CM}, \text{ also } \cos^2 a = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CM}^2} \dots\dots (2)$$

Beide Ausdrücke (1) und (2) addirt, kommt:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = \frac{\overline{MP}^2}{\overline{CM}^2} + \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CM}^2} = \frac{\overline{MP}^2 + \overline{CP}^2}{\overline{CM}^2} = \frac{\overline{CM}^2}{\overline{CM}^2} = 1$$

$$\text{Ferner: } \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{MP}{CM} : \frac{CP}{CM} = \frac{MP}{CP} = \operatorname{tg} a \quad (\S 2)$$

$$\text{eben so: } \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{CP}{CM} : \frac{MP}{CM} = \frac{CP}{MP} = \operatorname{cot} a.$$

Aus den beiden letztern Formeln $\operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}$ und $\operatorname{cot} a = \frac{\cos a}{\sin a}$

folgt durch Multiplication derselben $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cot} a = \frac{\sin a}{\cos a} \cdot \frac{\cos a}{\sin a} = 1.$

Nimmt man $CM=1$, so ist schon MP der *sinus* und CP der *cosinus* von a , und man kann dann die drei zuerst bewiesenen Formeln unmittelbar aus der Figur ablesen.

44.

Aufgabe. Aus einer trigonometrischen Function eines Winkels jede der drei übrigen zu berechnen.

Auflösung. Um zuerst den *sinus* durch den *cosinus* und umgekehrt auszudrücken, hat man unmittelbar aus Formel (1) (§ 43):

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a; \quad \cos^2 a = 1 - \sin^2 a$$

$$5, \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} \quad 6, \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a}$$

Um den *sinus* und *cosinus* durch die *tangente* auszudrücken, hat man nun aus (§ 43, 3):

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$$

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$$

$$\frac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}} = \operatorname{tg} a$$

$$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a} = \operatorname{tg} a$$

$$\frac{\sin^2 a}{1 - \sin^2 a} = \operatorname{tg}^2 a$$

$$\frac{1 - \cos^2 a}{\cos^2 a} = \operatorname{tg}^2 a$$

$$\sin^2 a = (1 - \sin^2 a) \operatorname{tg}^2 a$$

$$1 - \cos^2 a = \cos^2 a \cdot \operatorname{tg}^2 a$$

$$\sin^2 a = \operatorname{tg}^2 a - \sin^2 a \cdot \operatorname{tg}^2 a$$

$$1 = \cos^2 a + \cos^2 a \cdot \operatorname{tg}^2 a$$

$$\sin^2 a + \sin^2 a \operatorname{tg}^2 a = \operatorname{tg}^2 a$$

$$1 = \cos^2 a \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 a)$$

$$\sin^2 a \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 a) = \operatorname{tg}^2 a$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\sin^2 a = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

$$8, \cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$$

$$7, \sin a = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}}$$

Aus $\operatorname{tg} a \cdot \cot a = 1$ (§ 43, 2) folgt $\operatorname{tg} a = \frac{1}{\cot a}$ und $\cot a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$.

Es ist also einerlei, ob man mit $\cot a$ multiplicirt oder mit $\operatorname{tg} a$ dividirt und umgekehrt.

Um $\sin a$ und $\cos a$ durch $\cot a$ auszudrücken, setze man in (7) und (8) $\frac{1}{\cot a}$ statt $\operatorname{tg} a$, so hat man:

$$\sin a = \frac{\frac{1}{\cot a}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\cot^2 a}}}$$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\cot^2 a}}}$$

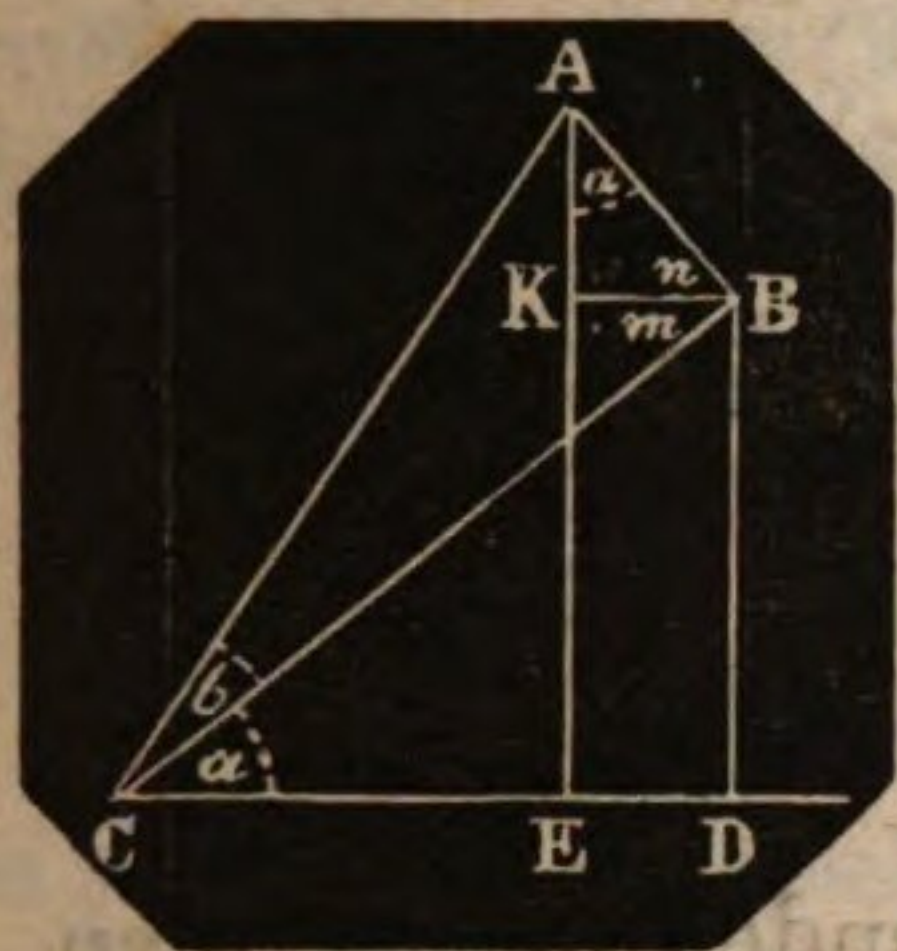
$$9, \sin a = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 a}}$$

$$10, \cos a = \frac{\cot a}{\sqrt{1 + \cot^2 a}}$$

Aus 8 und 9 folgt noch:

$$11, \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a} = \frac{1}{\cos a};$$

$$12, \sqrt{1 + \cot^2 a} = \frac{1}{\sin a}$$



Aufgabe. Aus den *sinus* und *cosinus* zweier Winkel, a und b , den *sinus* und *cosinus* von der Summe beider Winkel zu finden.*)

Auflösung. Man lege die beiden Winkel a , b , deren Summe wir vorläufig noch kleiner als 90° annehmen, an einander, so dass $\widehat{ACD} = a + b$. Von A fälle man die beiden Perpendikel AB , AE und von B die beiden Perpendikel BD , BK , dann ist $\widehat{BAK} = \widehat{BCD} = a$ (denn $m = a$, als Wechs. Winkel, $m + n = 90^\circ$ und $\widehat{BAK} + n = 90^\circ$, also $\widehat{BAK} = m = a$). Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck ABC folgt:

$$\frac{AB}{AC} = \sin b \text{ und } \frac{BC}{AC} = \cos b, \text{ also:}$$

$$(1) AB = AC \cdot \sin b \text{ und } (2) BC = AC \cdot \cos b$$

Aus dem bei K rechtwinkligen Dreieck ABK folgt:

$$\frac{AK}{AB} = \cos a \text{ und } \frac{BK}{AB} = \sin a. \text{ In beide Ausdrücke den für } AB$$

gefundenen Werth substituirt, kommt: $\frac{AK}{AC \cdot \sin b} = \cos a$ und

$$\frac{BK}{AC \cdot \sin b} = \sin a, \text{ hieraus:}$$

$$\frac{AK}{AC} = \cos a \sin b \dots\dots (3)$$

$$\frac{BK}{AC} = \sin a \sin b \dots\dots (4)$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD hat man: $\frac{BD}{BC} = \sin a$ und $\frac{CD}{BC} = \cos a$, oder für BC den Werth aus (2) gesetzt:

$$\frac{BD}{AC \cdot \cos b} = \sin a, \text{ und } \frac{CD}{AC \cdot \cos b} = \cos a. \text{ Hieraus:}$$

$$\frac{BD}{AC} = \sin a \cdot \cos b \dots\dots (5)$$

$$\frac{CD}{AC} = \cos a \cdot \cos b \dots\dots (6)$$

Addirt man die Gleichungen (3) und (5), so hat man:

$$\left(\text{weil } \frac{AK}{AC} + \frac{BD}{AC} = \frac{AK + BD}{AC} = \frac{AE}{AC} = \sin \widehat{ACD} = \sin(a + b) \right)$$

$$* (13) \sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

*) $\sin(a + b)$ ist nicht zu verwechseln mit $\sin a + \sin b$.

Subtrahirt man (4) von (6), so erhält man [weil $\frac{CD}{AC} - \frac{BK}{AC} = \frac{CD - BK}{AC} = \frac{CE}{AC} = \cos(a+b)$]:

$$* (14) \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b.$$

46.

Um zu zeigen, dass die beiden oben gefundenen wichtigen Formeln:

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \dots\dots (1)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \dots\dots (2)$$

auch für den Fall gelten, wo $a+b > 90$ ist, sei

1) $a = 90^\circ$, dann giebt die linke Seite der ersten Formel $\sin(90+b) = \cos b$ (§ 42); setzt man aber auf der rechten Seite auch $a = 90$, so giebt diese, weil $\sin 90 = 1$ und $\cos 90 = 0$ (§ 7), offenbar dasselbe, nämlich $\cos b$, wie es sein muss. Setzt man in der zweiten Formel $a = 90^\circ$, so geben beide Seiten dasselbe Resultat, nämlich:

$$\cos(90+b) = \cos 90 \cdot \cos b - \sin 90 \cdot \sin b$$

$$\text{oder: } -\sin b = -\sin b \text{ (§ 42 und § 7).}$$

2) Seien a und b beide spitz, aber $a+b > 90^\circ$. Setzt man nun $a = 90 - m$, $b = 90 - n$, mithin $a+b = 180 - (m+n)$, so ist $m+n < 90$. Substituirt man statt a und b ihre Ausdrücke, $90 - m$ und $90 - n$ in die erste Formel, so erhält man linker Hand: $\sin(180 - (m+n))$ oder $\sin(m+n)$ (§ 21). Auf der rechten Seite kommt:

$$\begin{aligned} & \sin(90 - m) \cdot \cos(90 - n) + \cos(90 - m) \sin(90 - n) \\ & = \cos m \cdot \sin n + \sin m \cdot \cos n \text{ (§ 5).} \end{aligned}$$

Dies ist aber die Entwicklung von $\sin(m+n)$, wofür, weil $m+n < 90$, die Formel gültig ist. Beide Seiten geben also dasselbe Resultat. Die Substitution in die zweite Formel giebt auf der linken Seite (§ 32):

$$\cos[180 - (m+n)] = -\cos(m+n) = -(\cos m \cos n - \sin m \cdot \sin n)$$

Die rechte Seite giebt (§ 5) $\cos(90 - m) \cos(90 - n) - \sin(90 - m) \sin(90 - n) = \sin m \sin n - \cos m \cos n$, also ganz dasselbe, wie auf der linken Seite. Linker Hand (Formel 2) ist $\cos(a+b)$ in sich negativ. Dies ist aber auch mit dem Betrage rechter Hand der Fall, weil für $a+b > 90$ auch $\cos a \cos b < \sin a \sin b$.

3. Sei $a > 90$. Setze $a = 90 + m$, dann giebt die Substitution in die erste Formel:

$$\sin(90 + m + b) = \sin(90 + m) \cos b + \cos(90 + m) \sin b, \text{ oder § 42:}$$

$$\cos(m + b) = \cos m \cos b - \sin m \sin b$$

Die zweite Formel giebt für $a = 90 + m$:

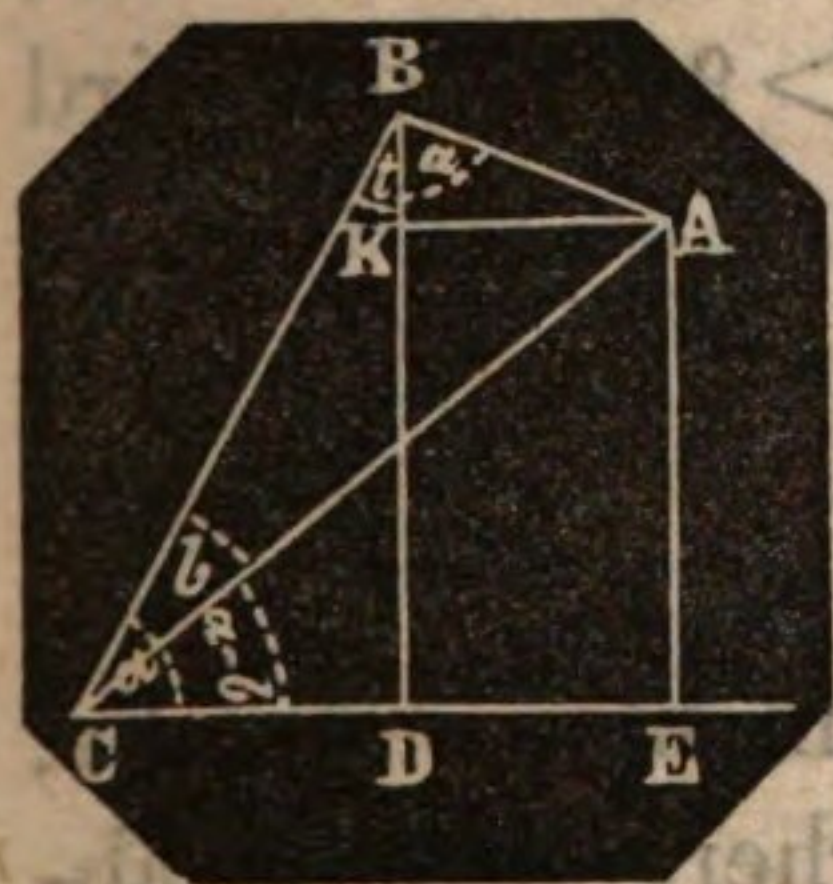
$$\cos(90 + m + b) = \cos(90 + m) \cos b - \sin(90 + m) \sin b, \text{ oder § 42:}$$

$$-\sin(m + b) = -\sin m \cos b - \cos m \sin b$$

$$\sin(m + b) = \sin m \cos b + \cos m \sin b$$

Wir erhalten also auch für $a > 90$ auf beiden Seiten der Formel (1) und (2) dasselbe Resultat.

47.



Um die eben so wichtigen Formeln für die *sinus* und *cosinus* der Differenz zweier Winkel, $\sin(a-b)$ und $\cos(a-b)$, zu finden, sei $\widehat{BCE} = a$ und $\widehat{BCA} = b$, also $\widehat{ACE} = a-b$, ferner AB senkrecht auf BC, und BD, AE senkrecht auf CE, sowie AK senkrecht auf BD, dann ist $\widehat{ABK} + t = \widehat{BCD} + t = 90$, also $\widehat{ABK} = \widehat{BCD} = a$.

Nun ist: $\frac{AB}{AC} = \sin b$ und $\frac{BC}{AC} = \cos b$, also:

$$(1) AB = AC \cdot \sin b \text{ und } (2) BC = AC \cdot \cos b$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD hat man:

$$\frac{BD}{BC} = \sin a \text{ und } \frac{CD}{BC} = \cos a, \text{ oder für BC seinen Werth aus (2)}$$

$$\text{gesetzt } \frac{BD}{AC \cdot \cos b} = \sin a \text{ und } \frac{CD}{AC \cdot \cos b} = \cos a, \text{ hieraus:}$$

$$(3) \frac{BD}{AC} = \sin a \cos b \text{ und } (4) \frac{CD}{AC} = \cos a \cos b$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABK hat man: $\frac{BK}{AB} = \cos a$

und $\frac{AK}{AB} = \sin a$ oder für AB seinen Werth aus (1) gesetzt,

$$\frac{BK}{AC \cdot \sin b} = \cos a \text{ und } \frac{AK}{AC \cdot \sin b} = \sin a, \text{ hieraus:}$$

$$(5) \frac{BK}{AC} = \cos a \sin b \text{ und } (6) \frac{AK}{AC} = \sin a \sin b$$

Subtrahirt man die Gleichungen (3) und (5), so erhält man,

$$\text{weil } \frac{BD}{AC} - \frac{BK}{AC} = \frac{BD - BK}{AC} = \frac{AE}{AC} = \sin(a - b)$$

$$* (15) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

Addirt man die Gleichungen (4) und (6) und bemerkt, dass:

$$\frac{CD}{AC} + \frac{AK}{AC} = \frac{CD + AK}{AC} = \frac{CE}{AC} = \cos(a - b), \text{ so hat man:}$$

$$* (16) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

Die allgemeine Gültigkeit der beiden Formeln 15 und 16, für den Fall, dass a oder beide, a und b , > 90 sind, wird wieder wie in § 46 bewiesen.

48.

Die übrigen Formeln der Goniometrie kann man nun alle, ohne eine Figur nöthig zu haben, aus den vorhergehenden ableiten. Dividirt man die Gleichungen 13 und 14 (§ 45) durch einander, so hat man:

$$\frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Dividirt man rechter Hand Zähler und Nenner durch $\cos a \cdot \cos b$ und bemerkt, dass $\frac{\sin a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$, etc. (§ 43), so kommt:

$$* (17) \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

Auf gleiche Weise geben die Formeln 15 und 16 (§ 47):

$$* (18) \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

49.

Setzt man in den drei Formeln:

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

$b = a$, so erhält man:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

oder auch, wenn man a statt $2a$, mithin $\frac{1}{2}a$ statt a setzt:

$$* (19) \sin a = 2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a$$

$$(20) \cos a = \cos^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a$$

$$(21) \operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}a}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a}$$

*) Diese, so wie auch die folgenden Formeln, gelten natürlich so gut wie die, woraus sie abgeleitet, sowohl für stumpfe als spitze Winkel.

Setzt man $b=2a$, so erhält man:

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a$$

oder, weil $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a$ und $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$, auch:

$$\sin 3a = \sin a (1 - 2 \sin^2 a) + \cos a \cdot 2 \sin a \cos a$$

$$\sin 3a = \sin a - 2 \sin^3 a + 2 \sin a \cos^2 a$$

$$\sin 3a = \sin a - 2 \sin^3 a + 2 \sin a (1 - \sin^2 a)$$

$$(22) \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a. *)$$

50.

Es ist: $1 = \cos^2 \frac{1}{2}a + \sin^2 \frac{1}{2}a$ (§ 43, 1)

und $\cos a = \cos^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a$ (§ 49, 20).

Die Addition und Subtraction dieser beiden Gleichungen geben folgende zwei wichtige Formeln:

$$* (23) 1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{1}{2}a$$

$$* (24) 1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{1}{2}a.$$

Dividirt man (24) durch (23), so hat man:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \frac{(1 - \cos a)(1 + \cos a)}{(1 + \cos a)^2} = \frac{\sin^2 a}{(1 + \cos a)^2}$$

$$\text{und auch } \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a} = \frac{(1 - \cos a)^2}{(1 + \cos a)(1 - \cos a)} = \frac{(1 - \cos a)^2}{\sin^2 a}$$

$$(25) \operatorname{tg} \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$$

*) Die Ableitung der Formeln, welche die *sinus* und *cosinus* von höhern Vielfachen eines Winkels durch Potenzen dieser Functionen und umgekehrt ausdrücken, gehört in die höhere Analysis.

51.

Setzt man in den Formeln 13, 14, 15, 16, 17, 18, §§ 45, 47, 48, $a = 45^\circ$, und beachtet, dass $\sin 45 = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\operatorname{tg} 45 = 1$, so hat man:

$$(26) \quad \sin(45 + b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b + \sin b)$$

$$(27) \quad \sin(45 - b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b - \sin b)$$

$$(28) \quad \cos(45 + b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b - \sin b)$$

$$(29) \quad \cos(45 - b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos b + \sin b)$$

$$(30) \quad \operatorname{tg}(45 + b) = \frac{1 + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} b}$$

$$(31) \quad \operatorname{tg}(45 - b) = \frac{1 - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} b}$$

Aus den vier erstern Formeln folgt, dass:

$$(32) \quad \sin(45 + b) = \cos(45 - b)$$

$$(33) \quad \cos(45 + b) = \sin(45 - b).$$

52.

Durch Addition und Subtraction der beiden Gleichungen:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

erhält man:

$$(34) \quad \sin(a + b) + \sin(a - b) = 2 \sin a \cos b$$

$$(35) \quad \sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos a \sin b$$

oder, indem man $a + b = p$ und $a - b = q$, folglich $a = \frac{p + q}{2}$

und $b = \frac{p - q}{2}$ setzt:

$$(36) \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p + q}{2} \cos \frac{p - q}{2}$$

$$(37) \quad \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p + q}{2} \sin \frac{p - q}{2}$$

Durch Addition und Subtraction der beiden Gleichungen

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

erhält man:

$$(38) \quad \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cdot \cos b$$

$$(39) \quad \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \cdot \sin b$$

oder, indem man wieder $a+b=p$ und $a-b=q$ setzt:

$$(40) \quad \cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

$$(41) \quad \cos q - \cos p = 2 \cdot \sin \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}$$

Durch diese vier wichtigen Formeln: 36, 37, 40, 41 kann man also die Summen und Differenzen zweier *sinus* oder *cosinus* in Producte verwandeln. Dividirt man noch (37) durch (36), so erhält man:

$$\frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{\cos \frac{p+q}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2}}{\sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}}$$

oder indem man rechter Hand Zähler und Nenner durch $\cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$ dividirt:

$$(42) \quad \frac{\sin p - \sin q}{\sin p + \sin q} = \frac{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p+q}{2}}$$

53.

Setzt man in (36) und (37), $p=90^\circ$, so ist:

$$(43) \quad 1 + \sin q = 2 \sin(45 + \tfrac{1}{2}q) \cos(45 - \tfrac{1}{2}q) = 2 \sin^2(45 + \tfrac{1}{2}q) \quad (32)$$

$$(44) \quad 1 - \sin q = 2 \cos(45 + \tfrac{1}{2}q) \sin(45 - \tfrac{1}{2}q) = 2 \cos^2(45 + \tfrac{1}{2}q)$$

Dividirt man (24) durch (20), so kommt:

$$\frac{1 - \cos a}{\cos a} = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}a}{\cos^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a} \text{ oder:}$$

$$\frac{1 - \cos a}{\cos a} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}a}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}a} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}a$$

$$(45) \quad \frac{1 - \cos a}{\cos a} = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}a \quad (21)$$

$$(46) \quad \operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

Durch ähnliche Combinationen könnte man solcher goniometrischen Formeln leicht noch mehrere finden, wir glauben jedoch an vorstehenden vollkommen genug zu haben.



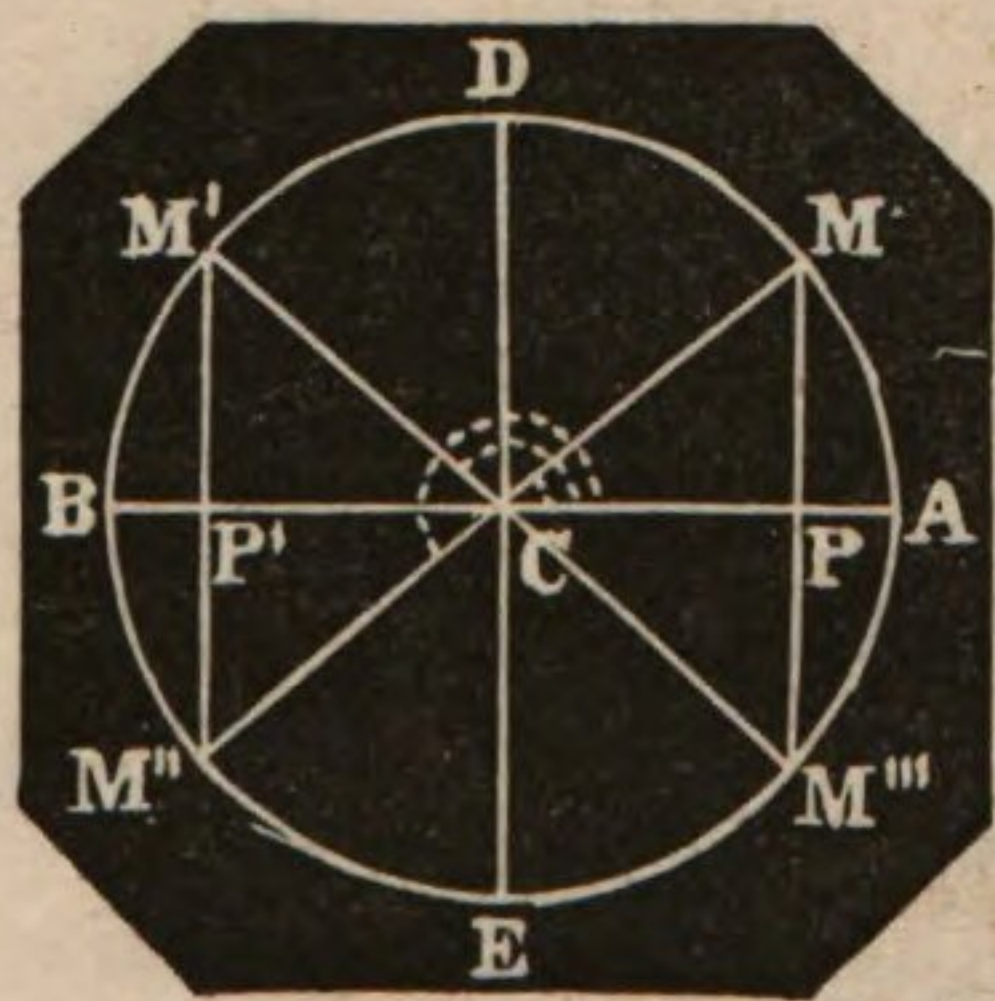
Sechstes Buch.

Ausdehnung der Begriffe *sinus*, *cosinus* etc.
auf überstumpfe und negative Winkel.

54.

Die vielfache Anwendung, welche die Goniometrie in der höheren und angewandten Mathematik findet, hat es nothwendig gemacht, die Begriffe der trigonometrischen Functionen auch auf überstumpfe Winkel oder eigentlich auf beliebig grosse Kreisbögen, ja selbst auf mehrere ganze Umläufe eines Kreises auszudehnen, und obgleich wir hier, so wie im Vorhergehenden, (§§ 21, 30) die Nothwendigkeit dieser Begriffserweiterung nach und nach herbeiführen und fühlbar machen könnten und beim mündlichen Unterricht auch thun würden, so können und wollen wir hier doch, Kürze halber, die bisher befolgte heuristische Methode verlassen, weil der Anfänger jetzt darauf vorbereitet ist, und wir an geeigneter Stelle auf die Nothwendigkeit der Begriffserweiterung aufmerksam machen werden.

55.



Es seien zur vorläufigen Festsetzung der Begriffe die beiden Durchmesser AB, DE senkrecht auf einander und von dem Endpunct M des Bogens AM das Perpendikel MP auf AB gefällt, so ist, wenn man den *radius* $CM=1$ setzt, wie bereits bekannt, MP der *sinus* und CP der *cosinus* des Bogens $\widehat{AM}$ oder des Winkels MCA.

Erstreckt sich der Bogen AM bis M', im zweiten Quadranten, so ist, wie ebenfalls schon bekannt, das Perpendikel M'P' der *sinus* und CP', negativ genommen, der *cosinus* des Bogens AM' oder des stumpfen Winkels M'CP.

Erstreckt sich der Bogen AM noch weiter bis M'', im dritten Quadranten, so heisst wiederum das vom Endpunct M'' auf den Durchmesser AB gefällte Perpendikel M''P' der *sinus* und CP' der *cosinus* des Bogens ADM'' und beide, *sinus* und *cosinus* dieses Bogens ADM'' müssen, um dem Zwecke dieser Begriffserweiterung zu entsprechen, als negativ angesehen werden, wie wir § 61 nachweisen wollen. Uebrigens ist klar, dass sowohl der *sinus* als *cosinus* dieses Bogens ADM'' dem *sinus* und *cosinus* von Bogen M''B oder vom spitzen Winkel M''CB (Ueberschuss über 180°) an Grösse vollkommen gleich und nur entgegengesetzt sind, so dass z. B. $\sin 240^\circ = -\sin 60^\circ$ und $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ$, $\sin(180 + a) = -\sin a$; $\cos(180 + a) = -\cos a$.

Erstreckt sich der Bogen ADM'' bis in den vierten Quadranten nach M''', so heisst wiederum das vom Endpunct M''' auf den Durchmesser AB gefällte Perpendikel M'''P, negativ genommen, der *sinus* und CP, positiv genommen, der *cosinus* des Bogens ADM''', und beide sind an Grösse gleich dem *sinus* und *cosinus* vom Winkel ACM''', so dass z. B. $\sin 320^\circ = -\sin(360 - 320) = -\sin 40$ und $\cos 320 = \cos 40$, oder auch so geschrieben: $\sin(3 \cdot 90 + a) = -\cos a$ und $\cos(3 \cdot 90 + a) = \sin a$.

Wächst endlich der Bogen oder Winkel über eine ganze Umdrehung (über 360°), so wiederholen sich die vorhergehenden Werthe sammt ihren Vorzeichen, so dass allgemein: $\sin(360 + a) = \sin a$, und $\cos(360 + a) = \cos a$, so wie auch wenn (für mehrere ganze Umdrehungen) n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

$$\sin(n \cdot 360 + a) = \sin a \text{ und } \cos(n \cdot 360 + a) = \cos a$$

56.

Hiernach sind also oberhalb des Durchmessers AB, nämlich im ersten und zweiten Quadranten die *sinus* immer positiv, in entgegengesetzter Lage, nämlich unterhalb des Durchmessers AB aber, also im dritten und vierten Quadranten negativ. Die *cosinus* sind im ersten und vierten Quadranten positiv, in entgegengesetzter Lage, auf der anderen Seite des Durchmessers DE, also im zweiten und dritten Quadranten negativ.

Und folglich sind auch, wenn man beachtet, dass $\frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$, $\frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{cot} a$ (§ 43) und dass gleiche Vorzeichen einen positiven, ungleiche aber einen negativen Quotienten geben, die *tangenten* und *cotangenten* im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweiten und vierten aber negativ.

57.

Betrachtet man die Drehung von A über D, z. B. den Bogen AM oder Winkel MCA als positiv, so kann man die Drehung im entgegengesetzten Sinne von A rückwärts nach E, z. B. den Bogen AM''' oder Winkel M'''CA als negativ betrachten. Sind beide entgegengesetzte Drehungen gleich gross, so haben sie nach dem, was § 56 festgesetzt worden, gleich grosse, jedoch entgegengesetzte *sinus*, aber völlig gleiche *cosinus*. Allgemein: *)

$$\sin(-a) = -\sin(+a); \cos(-a) = \cos(+a).$$

58.

Wächst der Bogen AM (oder Winkel MCP) von 0 bis 90°, so wächst offenbar (CM = 1 gesetzt) der *sinus* gleichzeitig

*) Es ist also auch $\cos(a-b) = \cos(b-a)$; und $\sin(a-b) = -\sin(b-a)$.

von 0 bis $DC=1$, der *cosinus* dagegen nimmt ab von $CA=1$ bis 0.

Wächst der Bogen von 90 bis 180° , so nimmt sein *sinus* wieder ab, von $DC=1$ bis 0, der *cosinus* aber wächst im negativen Sinne von 0 bis $CB=-1$.

Wächst der Bogen von 180 bis $3\cdot 90=270^\circ$, so wächst wieder der *sinus* im negativen Sinne von 0 bis $CE=-1$, der *cosinus* aber nimmt ab von $CB=-1$ bis 0.

Wächst der Bogen endlich von 270 bis 360° , so nimmt der *sinus* ab, von $CE=-1$ bis 0, der *cosinus* dagegen wächst von 0 bis $CA=1$, so dass also:

$\sin 0^\circ = 0$	$\cos 0^\circ = 1$
$\sin 90^\circ = 1$	$\cos 90^\circ = 0$
$\sin 180^\circ = 0$	$\cos 180^\circ = -1$
$\sin 270^\circ = -1$	$\cos 270^\circ = 0$
$\sin 360^\circ = 0$	$\cos 360^\circ = 1$

59.

Ist der *radius* eines Kreises $=1$, so ist der ganze Umfang, oder ein Bogen von 360° , $=2\pi$, der halbe Umfang, oder ein

Bogen von 180° , $=\pi$, ein Quadrant oder Bogen von 90° , $=\frac{\pi}{2}$ etc.

Man pflegt deshalb vorstehende Ausdrücke auch wohl so zu schreiben: (Vergl. § 62 a.)

$\sin \frac{\pi}{2} = 1$	$\cos \frac{\pi}{2} = 0$
$\sin \pi = 0$	$\cos \pi = -1$
$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$	$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$
$\sin 2\pi = 0$	$\cos 2\pi = 1$

Zufolge der § 55 festgesetzten Begriffe ist $\sin 360 = \sin 2\cdot 360 = \sin 3\cdot 360^\circ$ etc. $=0$, oder $\sin 1\cdot 2\pi = \sin 2\cdot 2\pi = \sin 3\cdot 2\pi$ etc. $=0$ oder allgemein, wenn k eine beliebige ganze Zahl ($0, 1, 2, 3, \dots$) bedeutet, so stellt $2k\pi$ alle Bögen dar, deren *sinus* $=0$ und deren *cosinus* $=1$. Eben so stellt $(2k+1)\pi$ alle Bögen dar,

deren *sinus* wieder $= 0$, deren *cosinus* aber $= -1$. Daher:

$$\begin{aligned} \sin 2k\pi &= 0 & \cos 2k\pi &= 1 \\ \sin(2k+1)\pi &= 0 & \cos(2k+1)\pi &= -1 \end{aligned}$$

60.

Jetzt bleibt uns noch zu beweisen übrig, dass die im Vorhergehenden aufgeführten und § 100 zusammengestellten Formeln, welche bisher nur für Winkel < 180 bewiesen sind, auch für diese Begriffserweiterung der trigonometrischen Functionen allgemein gültig sind, so wie auch, weshalb für Bögen oder Winkel über 180° die trigonometrischen Functionen die § 55 vorläufig festgesetzten Vorzeichen, der allgemeinen Gültigkeit der Formeln halber, nothwendig erhalten müssen.

61.

Dass die ersten acht Formeln (§ 100) für alle noch so grosse Bögen gelten, ist, mit Berücksichtigung der Vorzeichen, klar, es fragt sich also nur, ob auch die Fundamentalformeln (9) und (10) allgemein gültig sind. Dass diese beiden Formeln, nämlich:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \dots\dots (1)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \dots\dots (2)$$

für $a+b > 90$ gelten, ist bereits § 46 bewiesen.

Es seien nun beide Winkel a und b stumpf, folglich $a+b > 180^\circ$, aber noch $a+b < 270^\circ$, und wir müssen nun zeigen, dass die rechten Seiten beider Formeln ganz dasselbe geben, wie die linken Seiten, indem wir den *sinus* und *cosinus* von dem überstumpfen Winkel $a+b$ an Grösse und Vorzeichen so nehmen, wie in § 55 festgesetzt worden.

Man setze $a = 90 + p$ und $b = 90 + q$ (wo p und q spitze Winkel sind und auch $p + q < 90$), so giebt die Substitution von $90 + p$ und $90 + q$ in die erste Formel:

$$\sin(180 + p + q) = \sin(90 + p) \cdot \cos(90 + q) + \cos(90 + p) \cdot \sin(90 + q)$$

Aus dieser Gleichung folgt aber, vermöge §§ 55 und 42:

$$-\sin(p + q) = -\cos p \cdot \sin q - \sin p \cdot \cos q$$

$$-\sin(p + q) = -(\sin p \cdot \cos q + \cos p \cdot \sin q)$$

was also vollkommen stimmt und zugleich, wenn man die erste Formel auf überstumpfe Winkel ausdehnen will, die Nothwendigkeit zeigt, den *sinus* eines solchen Winkels als negativ zu nehmen, weil die rechte Seite der ersten Formel ein negatives Resultat giebt.

Dieselbe Substitution in die zweite Gleichung giebt:

$$\cos(180 + p + q) = \cos(90 + p) \cos(90 + q) - \sin(90 + p) \sin(90 + q)$$

hieraus, zufolge §§ 55 und 42:

$$-\cos(p + q) = +\sin p \cdot \sin q - \cos p \cdot \cos q$$

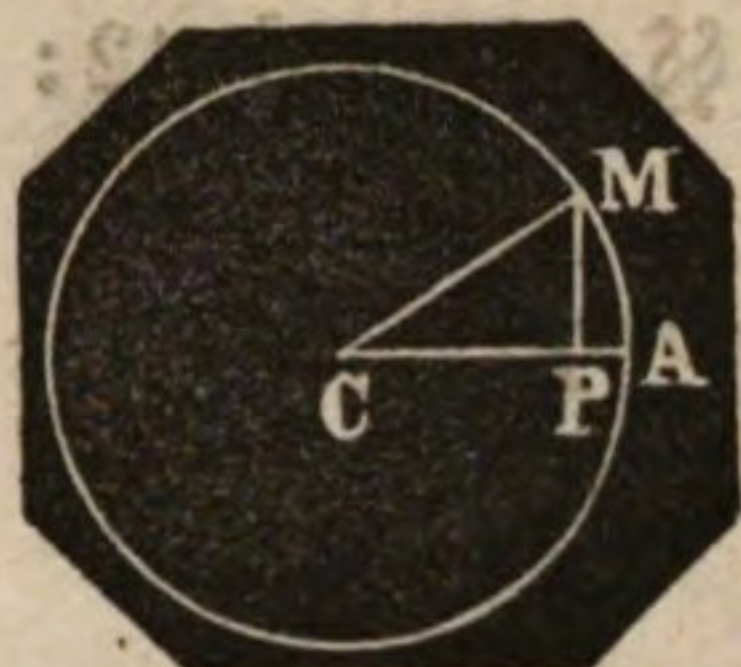
$$-\cos(p + q) = -(\cos p \cdot \cos q - \sin p \cdot \sin q)$$

was also wieder vollkommen stimmt.

Eben so beweist man die Gültigkeit der beiden Grundformeln für die Fälle, wo 1, a stumpf und $b = 90^\circ$, 2, a stumpf und b spitz ist, indem man beide mal $90 + p$ für a substituirt.

Sind endlich a und b stumpf und $a + b > 270^\circ$, so setze $a = 180 - p$, $b = 180 - q$ und beachte, dass $\sin(360 - (p + q)) = -\sin(p + q)$; $\cos(360 - (p + q)) = \cos(p + q)$ und $\sin(180 - p) = \sin p$; $\cos(180 - p) = -\cos p$. Die übrigen besondern Fälle sind hiernach leicht zu behandeln, so wie auch die beiden Formeln für $\sin(a - b)$ und $\cos(a - b)$, für den Fall, wo a und b beliebig gross, oder auch $b > a$ ist.

* In der höhern Mathematik werden die Winkel, statt durch Grade, in der Regel durch die Längen der, immer mit einem Radius $=1$, zwischen ihren Schenkeln beschriebenen Bögen



ausgedrückt. So ist z. B. für $CM=1$ der ganze Umfang $=2\pi=6,28318\dots$ und ein Bogen, AM , von 30° z. B. wäre in Länge (oder, wie es in der Kunstsprache heisst, in Theilen des Halbmessers) ausgedrückt,

$$=2\pi \cdot \frac{30}{360} = 0,523\dots, \text{ d. h. denkt man die}$$

Einheit (den Halbmesser) in 1000 gleiche Theile getheilt, so kommen auf die Länge eines Bogens von 30° etwas über 523 solcher Theile. Statt $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ kann man also auch schreiben: $\sin 0,523\dots = \frac{1}{2}$. (Soll jedoch die trigonometrische Function eines in Theilen des Halbmessers gegebenen Bogens, z. B. $\sin 0,523\dots$, mit Hülfe der Tafeln aufgeschlagen werden, so muss man den Bogen erst in Grade verwandeln: also $\sin 0,5236\dots = \sin \frac{0,5236\dots}{2\pi} \cdot 360^\circ = \sin 30^\circ$.)

Um anzudeuten, dass ein Winkel (*angulus*) oder Bogen (*arcus*) genommen werden soll, der zu einer numerisch gegebenen trigonometrischen Function gehört, dessen *sinus* z. B. $=\frac{1}{2}$ ist, schreibt man so: $\text{ang}(\sin = \frac{1}{2})$; $\text{arc}(\sin = \frac{1}{2})$ oder kürzer: $\text{arc sin } \frac{1}{2}$.

Da $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ist, so ist umgekehrt $\text{ang sin } \frac{1}{2} = 30^\circ$,*) eben so $\text{arc sin } \frac{1}{2} = 0,5236\dots$. Eben so bedeutet $\text{arc cos } \frac{1}{2}$ einen mit dem *radius* $=1$ beschriebenen Bogen, dessen *cosinus* $=\frac{1}{2}$ etc. Um anzudeuten, dass ein mit dem *radius* $=r$ beschriebener Bogen genommen werden soll, dessen *cosinus* $=\frac{1}{2}$ ist, schreibt man also $\cdot r \cdot \text{arc cos } \frac{1}{2}$.

* Ist der *sinus* eines Bogens, a , $=x$, so ist der *cosinus* desselben Bogens a , $=\sqrt{1-x^2}$ (§ 44). Ist ferner die *cotangente* eines

*) Zu einer trigonometrischen Function gehören zwar unzählig viele Winkel (Bögen). Ohne besondere Veranlassung nimmt man aber immer den kleinsten.

Bogens, $a, = x$, so ist die *tangente* desselben Bogens $a, = \frac{1}{x}$
 (weil $tg a = \frac{1}{cot a}$, § 43, 2).

Es ist mithin auch:

$$arc(sin = x) = arc(cos = \sqrt{1-x^2})$$

$$arc(cot = x) = arc\left(tg = \frac{1}{x}\right)$$

Da nun ferner:

$$sin arc(sin = x) = x \text{ und:}$$

$$sin arc(cos = x) = sin arc(sin = \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$$

$$cot arc(tg = x) = cot arc\left(cot = \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

so erhellt auch die Richtigkeit folgender Formel, nach welcher man zwei, durch ihre trigonometrischen Functionen bestimmte Bögen addiren (subtrahiren) kann. Es ist nämlich:

$$arc sin x + arc sin y = arc sin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

denn, beiderseits die *sinus* genommen, hat man, rechter Hand:

$$sin arc sin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

und linker Hand, zufolge § 45, 13:

$$sin(arc sin x + arc sin y) = sin arc sin x \cdot cos arc sin y + cos arc sin x \cdot sin arc sin y$$

$$\text{d. i. } sin(arc sin x + arc sin y) = x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2}$$

also auf beiden Seiten gleich.

Eben so findet man:

$$arc cos x + arc cos y = arc cos(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})$$

$$arc tg x + arc tg y = arc tg \frac{x+y}{1-xy}$$

$$2 arc tg x = arc tg x + arc tg x = arc tg \frac{2x}{1-x^2}$$

62 c.

* Drückt man die mit einem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Bögen statt in Secunden in Längen (in Theilen des Halbmessers)

aus, so zeigt sich, wie auch schon aus der unmittelbaren Betrachtung des Kreises folgt, dass die *sinus* zwar immer kleiner und die *tangenten* immer grösser, als die zugehörigen Bögen sind, innerhalb eines kleinen Intervalls aber, etwa von 0'' bis 100'', der Unterschied aller drei so gering ist, dass er erst in der achten Decimale sich zeigt, und dass man deshalb, innerhalb dieser Grenzen, statt der *sinus* (*tangenten*) die Bögen selbst (in Theilen des Halbmessers ausgedrückt) setzen kann, so wie auch das Verhältniss zweier solcher kleinen *sinus* durch das Verhältniss ihrer Bögen, gleichviel, ob in Längen oder in Secunden ausgedrückt, darstellen kann. So ist z. B.:

$$\text{Bogen von } 1'' = \frac{3,1415926}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

$$\log \text{arc } 1'' = 4,6855749 - 10$$

$$\log \sin 1'' = 4,6855749 - 10$$

$$\log \sin 10'' = 5,6855749 - 10$$

$$\log \sin 30'' = 6,1626961 - 10$$

$$\text{arc } 1'' = \sin 1'' = 0,000004848137 \dots$$

$$\sin 10'' = 0,00004848137 \dots$$

$$\sin 30'' = 0,0001454441 \dots$$

$$\frac{\sin 30''}{\sin 10''} = \frac{0,000145 \dots}{0,000048 \dots} = \frac{30''}{10''} = 3$$

Da die Längen der Bögen der Anzahl ihrer Secunden proportional sind, so erhält man die Länge eines mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen und in Graden etc. gegebenen Bogens, indem man ihn erst auf Secunden reducirt und die erhaltene Anzahl mit *arc* 1'' oder *sin* 1'' multiplicirt. So ist z. B. der mit dem Halbmesser = 1 beschriebene Bogen von 30° in Länge = $30 \cdot 60 \cdot 60 \cdot \sin 1''$, mithin = $108000 \cdot 0,000004848137 \dots = 0,523598796$.

Umgekehrt wird also ein in Theilen des Halbmessers = 1 gegebener Bogen in Secunden ausgedrückt, indem man ihn

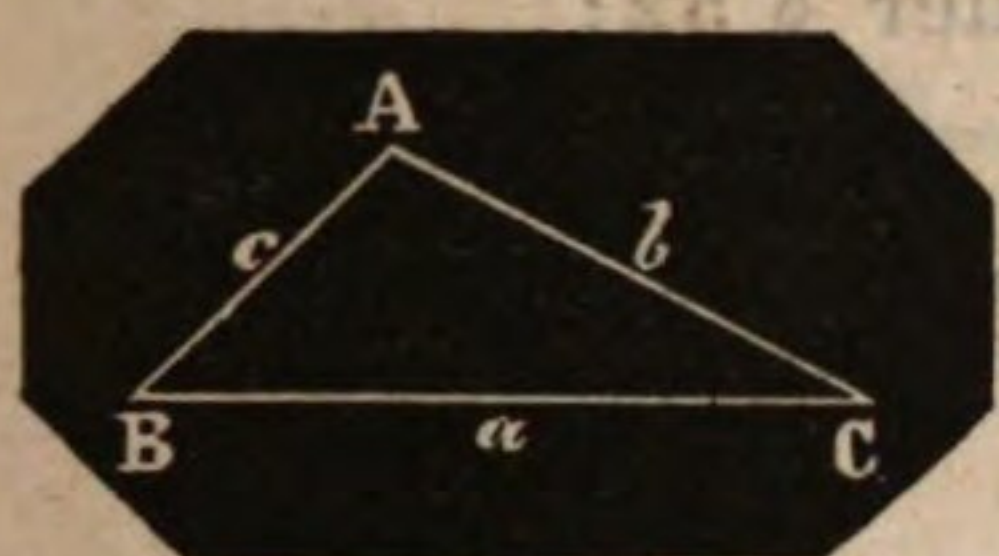
$$\text{durch } \sin 1'' \text{ dividirt oder mit } \frac{1}{\sin 1''} = \frac{1}{0,000004848137} = 206265$$

multiplicirt. So viel Secunden, nämlich $206265'' = 57^\circ 17' 44'',8$, kommen also auf einen Bogen, dessen Länge = 1, gleich dem *radius* ist.

Siebentes Buch.

Anwendungen der Goniometrie.

63 a.



Die §§ 35 und 36 aus der Figur abgeleiteten Formeln hätte man, unter Voranstellung der Goniometrie, folgendermassen etwas kürzer ableiten können,

was jedoch dem Anfänger nicht so klar geworden sein würde.

Um aus drei Seiten eines Dreiecks einen Winkel, z. B. B zu finden, ist nach § 30:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \text{ hieraus (§ 50):}$$

$$1 - \cos B = 1 - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$1 + \cos B = 1 + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} B = \frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2ac}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} B = \frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} B = \frac{b^2 - (a - c)^2}{2ac}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} B = \frac{(a + c)^2 - b^2}{2ac}$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} B = \frac{(b + a - c)(b + c - a)}{4ac}$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} B = \frac{(a + c + b)(a + c - b)}{4ac}$$

$$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a + b - c)(b + c - a)}{4ac}}$$

$$\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a + b + c)(a + c - b)}{4ac}}$$

Beide Gleichungen durch einander dividirt:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(a + b - c)(b + c - a)}{(a + b + c)(a + c - b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(\frac{1}{2}s - a)(\frac{1}{2}s - c)^*}{\frac{1}{2}s \cdot (\frac{1}{2}s - b)}}$$

*) Wenn der *sinus* oder *cosinus* eines Winkels nahe = 1 ist, so ändern sich diese beiden Functionen mit dem Wachsen des Winkels sehr langsam,

Um aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel a, b, C , die beiden andern Winkel A und B zu finden, hat man nach § 27:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \text{ hieraus:}$$

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{\sin A}{\sin B} - 1 \text{ und } \frac{a}{b} + 1 = \frac{\sin A}{\sin B} + 1$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin B}; \quad \frac{a+b}{b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin B}$$

Beide Gleichungen durch einander dividirt, kommt:

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a-b}{a+b} \text{ oder § 52:}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)} = \frac{a-b}{a+b} \text{ (wie in § 36).}$$

63 b.

Aufgabe. Die Höhe eines Leuchthurmlichtes, L , über dem Niveau des Meeres ist $=h=200'$. Aus welcher Entfernung, e , kann es erblickt werden, wenn die Höhe des Auges A über demselben Niveau $=h'=12'$?

Antwort. Es kann nicht eher erblickt werden, als bis das Auge A in die Verlängerung der vom Punkte L an die Erde gezogenen Berührungslinie tritt. Verbindet man also die Punkte L , A und den Berührungspunkt T mit dem Mittelpunkt C , setzt $\widehat{LCT} = \alpha$ und $\widehat{ACT} = \epsilon$, so hat man:

$$\cos \alpha = \frac{r}{r+h} \text{ und } \cos \epsilon = \frac{r}{r+h'}$$

oder, weil bei dieser Art Aufgaben die Winkel α und ϵ immer sehr klein sind, so erhält man nach §§ 63 a Randanmerkung und 50 (24) genauer:

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h}{r+h}} \text{ und } \sin \frac{1}{2} \epsilon = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}h'}{r+h'}}$$

Aus den Winkeln α und ϵ findet man dann leicht die zu-

wie die unmittelbare Betrachtung des Kreises oder auch die in den Tafeln ausgesetzten Differenzen zeigen. Wenn man also die Wahl hat, einen Winkel durch eine beliebige trigonometrische Function zu bestimmen, so wählt man immer die, welche die grössten Differenzen hat, weil hier ein Fehler von ein paar Einheiten in der letzten Stelle des Logarithmen keinen grossen Einfluss auf den dazu aufzuschlagenden Winkel übt. Die *tangenten* haben immer die grössten Differenzen und bestimmen die Winkel also am genauesten.

gehörigen Bögen, oder wenn ihre Summe der Länge der Tangente AL gleich gesetzt werden kann (§ 40 c), gleich einfacher:

$$e = \sqrt{2rh + h^2} + \sqrt{2rh' + h'^2}, \text{ oder genau genug:}$$

$$e = \sqrt{2rh} + \sqrt{2rh'}$$

$$e = 112140' = 4,7 \text{ Meilen.}$$

Aufgabe. Wie gross ist die Fläche F der Erdzone von $\varphi = 23\frac{1}{2}^\circ$ bis $\varphi' = 66\frac{1}{2}^\circ$ der geographischen Breite? (Der Radius der Erde $r = 859,436$ Meilen.)

Antwort. Es ist die Höhe der Zone $= r \sin \varphi' - r \sin \varphi$ und folglich (Geometrie § 178) $F = 2r^2 \pi (\sin \varphi' - \sin \varphi)$, oder: § 52, 37

$$F = 4r^2 \pi \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2}$$

$$F = 2405456 \square \text{ Meilen.}$$

64.

Hilfswinkel. Weil die *tangenten* und *cotangenten* immer zwischen 0 und ∞ enthalten, die *sinus* und *cosinus* aber immer ächte Brüche sind, so ist klar, dass man jede gegebene, noch so kleine oder grosse Zahl als *tangente* oder *cotangente* und jeden ächten Bruch immer als *sinus* oder *cosinus* eines, mit Hülfe der Tafeln leicht zu bestimmenden Winkels betrachten kann. Soll z. B. der Winkel m gefunden werden, dessen *tangente* $= 5\frac{3}{4} = 5,75$ ist, so hat man:

$$\operatorname{tg} m = 5,75$$

$$\log \operatorname{tg} m = 10,7596678 - 10$$

$$m = 80^\circ 8' 3''$$

Soll $\frac{5}{8} = 0,625$ der *sinus* eines Winkels n sein, so ist:

$$\sin n = 0,625$$

$$\log \sin n = 9,7958800 - 10$$

$$n = 38^\circ 40' 56''$$

Dies vorausgeschickt, wollen wir jetzt an einem leichten Beispiel zeigen, wie man durch Vermittelung eines sogenannten Hilfswinkels, den man in die Rechnung einführt, verwickelte Ausdrücke oftmals bedeutend vereinfachen kann.

Angenommen, es sei gegeben $a = 506835$, $b = 279041$, und es soll $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ berechnet werden. Die unmittelbare Rechnung würde hier zehn Operationen erfordern. Kürzer verfährt man so: Es ist:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)} \text{ oder:}$$

$$x = a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

Betrachtet man hier nun $\frac{b}{a}$ als *tangente* eines leicht zu bestimmenden Winkels m , so dass $\operatorname{tg} m = \frac{b}{a}$, und setzt also $\operatorname{tg}^2 m$ statt $\frac{b^2}{a^2}$, so ist:

$$x = a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 m} = a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 m}} \quad (\S 44, 11)$$

$$x = \frac{a}{\cos m}, \text{ worin } \operatorname{tg} m = \frac{b}{a}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 5,7048666 \\ \cdots \cos m &= 9,9425090 - 10 \\ \cdots \cdots x &= 5,7623576 \\ x &= 578572,29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log b &= 5,4456681 \\ \cdots a &= 5,7048666 \\ \cdots \operatorname{tg} m &= 9,7408015 - 10 \\ m &= 28^\circ 50' 7''. \end{aligned}$$

65.

Aufgabe. Man soll aus der Gleichung:

$$a \sin x + b \cos x = c$$

den Winkel x finden.

Auflösung. Man hat zuerst:

$$\sin x + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a}$$

Betrachtet man hier wieder $\frac{b}{a}$ als *tangente* eines Hüfswinkels m , setzt also $\operatorname{tg} m$ statt $\frac{b}{a}$, so ist:

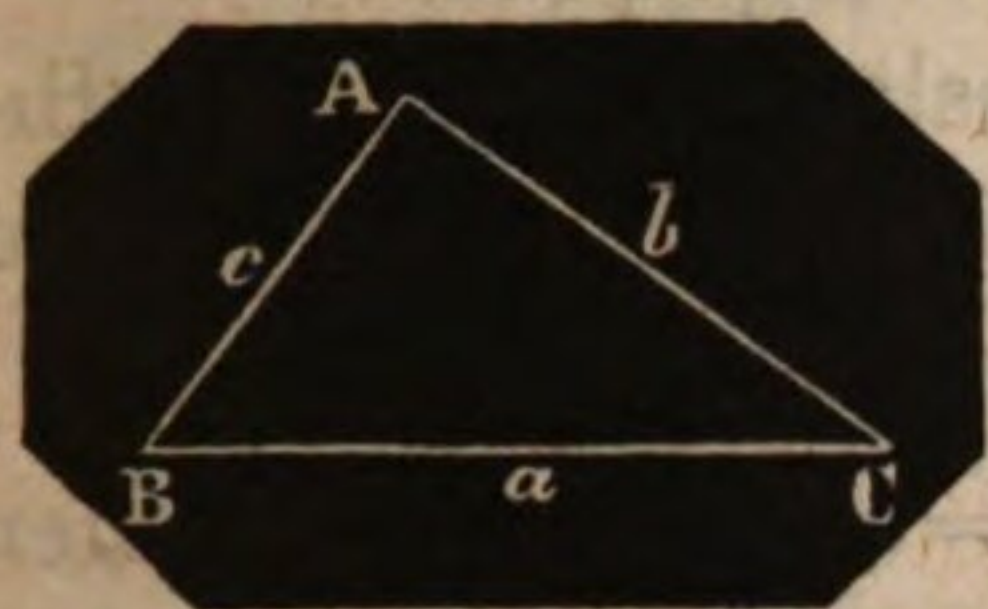
$$\sin x + \operatorname{tg} m \cdot \cos x = \frac{c}{a} \text{ oder:}$$

$$\sin x + \frac{\sin m}{\cos m} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \quad (\S 45, 3)$$

$$\sin x \cdot \cos m + \cos x \sin m = \frac{c \cdot \cos m}{a} \text{ und } (\S 45, 13)$$

$$\sin(x + m) = \frac{c \cdot \cos m}{a}, \text{ worin: } \operatorname{tg} m = \frac{b}{a}$$

66.



Aufgabe. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel a, b, C eines Dreiecks die dritte Seite c zu finden.

Auflösung. Am besten berechnet man erst nach § 36 die beiden andern Winkel A und B , und dann nach der *Sinus*-Regel die Seite c . Man kann aber letztere auch mittelst eines Hülfswinkels folgendermassen bestimmen. Zuerst hat man (30):

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \text{ hieraus:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \text{ oder:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab + 2ab - 2ab \cdot \cos C$$

$$c^2 = (a - b)^2 + 2ab(1 - \cos C)$$

$$c^2 = (a - b)^2 + 2ab \cdot 2 \sin^2 \frac{1}{2}C$$

$$c^2 = (a - b)^2 \left\{ 1 + \frac{4ab \cdot \sin^2 \frac{1}{2}C}{(a - b)^2} \right\}$$

$$c^2 = (a - b)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 m)$$

$$c = \frac{a - b}{\cos m}, \text{ worin } \operatorname{tg} m = \frac{2 \sin \frac{1}{2}C \cdot \sqrt{ab}}{a - b}$$

Man kann auch folgendermassen verfahren. Aus:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{ folgt:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - 2ab \cos C$$

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab(1 + \cos C)$$

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab \cdot 2 \cos^2 \frac{1}{2}C$$

$$c^2 = (a + b)^2 \left[1 - \frac{4ab \cdot \cos^2 \frac{1}{2}C}{(a + b)^2} \right]$$

$$c^2 = (a + b)^2 [1 - \sin^2 v]$$

$$c = (a + b) \cos v, \text{ worin } \sin v = \frac{2 \cos \frac{1}{2}C \sqrt{ab}}{a + b}$$

Zur Uebung möge hiezu das Zahlenbeispiel § 37 dienen.

67 a.

Aufgabe. Es sind die Lagen dreier Punkte, N, B, O , oder das dadurch bestimmte Dreieck gegeben, von einem vierten Punkt, Z , aus (in derselben Ebene) hat man auf die drei Punkte visirt und die Winkel m und n gemessen. Man soll daraus die Lage dieses vierten Punktes Z , d. h. seine Entfernungen r, r', r'' von den drei Punkten N, B, O bestimmen.

Wir nehmen zu diesem sogenannten Pothonot'schen Problem ein Zahlenbeispiel aus Berghaus' Geographie.

Die Lage des Elisabeth-Thurms in Breslau gegen den Rathhausturm in Neumarkt und den Thurm der Kirche zu Ohlau ist bekannt. Es beträgt nämlich die Entfernung

von Breslau nach Neumarkt $BN = a = 8227,32$ Ruthen

„ Breslau nach Ohlau $BO = b = 7014,23$ „

der Winkel $NBO = B = 145^\circ 39' 50'',5$

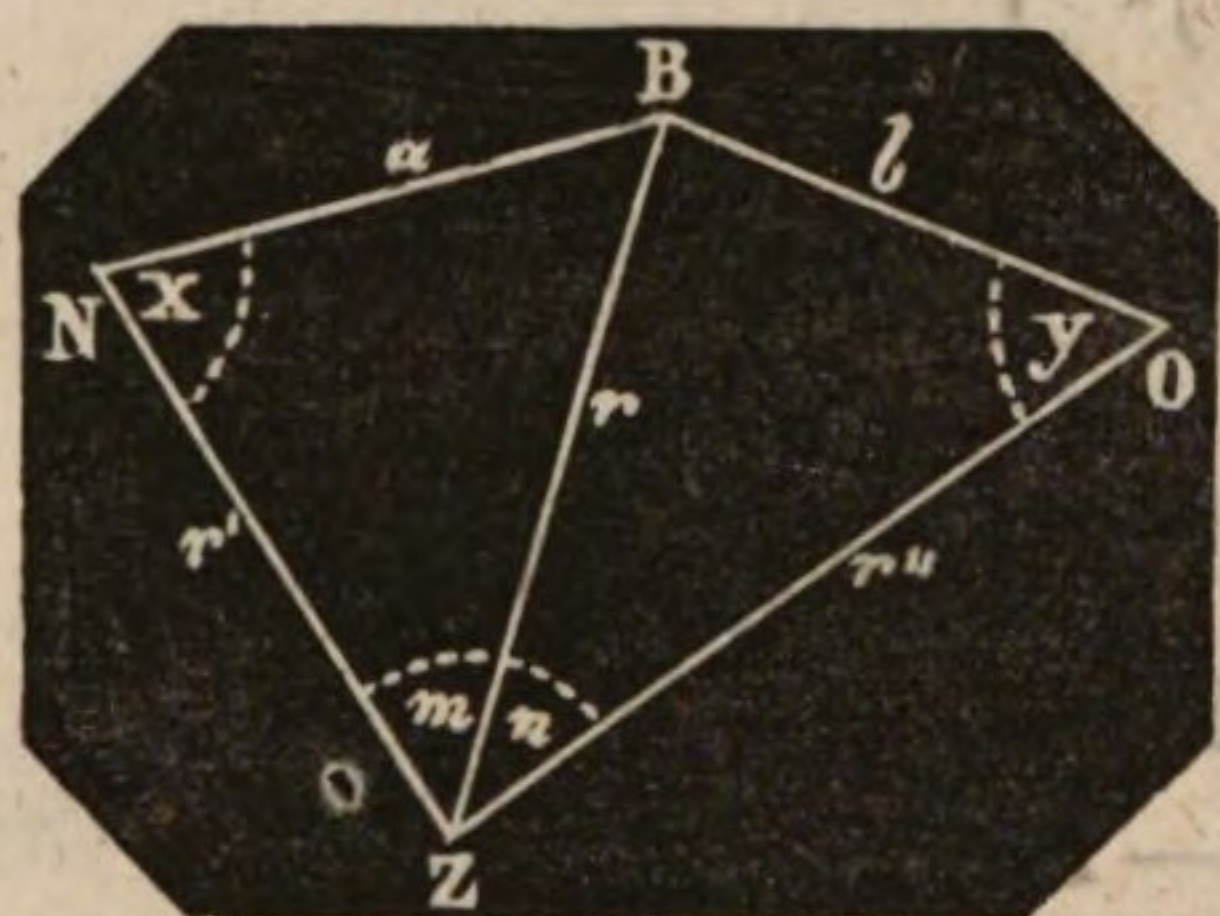
in Zobten wurde gemessen: $\hat{m} = 52^\circ 44' 22'',2$

$\hat{n} = 38^\circ 37' 38'',3$

man sucht die Entfernungen r, r', r'' .

Auflösung. Man suche erst die beiden Winkel $BNZ = x$ und $BOZ = y$. Ihre Summe ist bekannt, nämlich $x + y = 360 - (B + m + n) = 122^\circ 58' 9''$, also $\frac{x + y}{2} = 61^\circ 29' 4'',5$. Nun ist:

$$(1) \frac{\sin y}{\sin n} = \frac{r}{b} \text{ und } (2) \frac{\sin m}{\sin x} = \frac{a}{r}$$



Multipliziert man (1) und (2), so ist:

$$\frac{\sin m \cdot \sin y}{\sin n \cdot \sin x} = \frac{a}{b} \text{ oder}$$

$$\frac{\sin y}{\sin x} = \frac{a \cdot \sin n}{b \cdot \sin m} = \operatorname{tg} v$$

wo der Hülfswinkel v leicht zu finden und als bekannt anzusehen ist.

Aus der Gleichung $\frac{\sin y}{\sin x} = \operatorname{tg} v$ folgt nun:

$$1 - \frac{\sin y}{\sin x} = 1 - \operatorname{tg} v \text{ und } 1 + \frac{\sin y}{\sin x} = 1 + \operatorname{tg} v$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x} = 1 - \operatorname{tg} v; \quad \frac{\sin x + \sin y}{\sin x} = 1 + \operatorname{tg} v$$

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{1 - \operatorname{tg} v}{1 + \operatorname{tg} v}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x - y)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x + y)} = \operatorname{tg}(45 - v). \quad (\S\S 51 \text{ und } 52)$$

$$\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \operatorname{tg} \frac{x + y}{2} \operatorname{tg}(45 - v) \text{ worin:}$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{a \cdot \sin n}{b \cdot \sin m}$$

$$\begin{array}{lll}
 \log b = 3,8459800 & \log a = 3,9152584 & \log \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = 10,2649570 \\
 \dots \sin m = 9,9008537 & \dots \sin n = 9,7953599 & \\
 \hline
 3,7468337 & 3,7106183 & \dots \operatorname{tg}(45-v) = 8,6198293 \\
 v = 42^\circ 36' 49'', 8 & 3,7468337 & \dots \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = 8,8847863 \\
 45-v = 2^\circ 23' 10'', 2; & \log \operatorname{tg} v = 9,9637846 & \\
 & & \frac{x-y}{2} = 4^\circ 23' 9'', 2
 \end{array}$$

Mithin ist: $x = 65^\circ 52' 13'', 7$ und $y = 57^\circ 5' 55'', 3$.

Nachdem nun x und y gefunden, hat man aus (1):

$$r = b \frac{\sin y}{\sin n} \text{ oder auch } r = a \frac{\sin x}{\sin m}$$

$$\text{dann: } \frac{r'}{a} = \frac{\sin(x+m)}{\sin m}, \text{ woraus:}$$

$$r' = a \cdot \frac{\sin(x+m)}{\sin m}$$

$$\text{Ferner ist: } \frac{r''}{b} = \frac{\sin(y+n)}{\sin n}, \text{ woraus:}$$

$$r'' = b \cdot \frac{\sin(y+n)}{\sin n}$$

$\log b = 3,8459800$	$\log a = 3,9152584$	$\log b = 3,8459800$
$\dots \sin y = 9,9240764$	$\dots \sin(x+m) = 9,9434449$	$\dots \sin(y+n) = 9,9978276$
$\hline 13,7700564$	$\hline 13,8587033$	$\hline 13,8438076$
$\dots \sin n = 9,7953599$	$\dots \sin m = 9,9008537$	$\dots \sin n = 9,7953599$
$\dots r = 3,9746965$	$\dots r' = 3,9578496$	$\dots r'' = 4,0484477$
$\hline r = 9434,01$	$\hline r' = 9075,06$	$\hline r'' = 11180,15$

67 b.

* Durch Benutzung eines Hülfswinkels lassen sich bequeme Formeln zur Berechnung der reellen Wurzeln x' , x'' einer verwickelten quadratischen Gleichung aufstellen. Man erhält nämlich, unter Berücksichtigung der Vorzeichen von p und q , aus:

$$(1) \quad x^2 + px = q$$

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 + 4q}$$

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}p \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}$$

Setzt man jetzt $tg u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so ist (§ 100, 7):

$$x = \frac{1}{2}p \left(-1 \pm \frac{1}{\cos u} \right) = \frac{1}{2}p \left(\frac{-\cos u \pm 1}{\cos u} \right)$$

Die beiden reellen Wurzeln sind also:

$$x' = \frac{1}{2}p \cdot \frac{1 - \cos u}{\cos u} = p \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{\cos u}$$

$$x'' = -\frac{1}{2}p \cdot \frac{1 + \cos u}{\cos u} = -p \cdot \frac{\cos^2 \frac{1}{2}u}{\cos u}$$

Aus $tg u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ folgt $p = \frac{2\sqrt{q}}{tg u} = 2\sqrt{q} \cdot \frac{\cos u}{\sin u}$

Wird dieser Werth von p substituirt, so ist (§ 100, 16):

$$x' = tg \frac{1}{2}u \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = -\frac{\sqrt{q}}{tg \frac{1}{2}u}$$

Auf dieselbe Weise findet man aus:

$$(2) \quad x^2 - px = q$$

wenn wiederum $tg u = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ gesetzt wird:

$$x' = -tg \frac{1}{2}u \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = \frac{\sqrt{q}}{tg \frac{1}{2}u}$$

Ferner hat man aus:

$$(3) \quad x^2 + px = -q$$

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \frac{1}{2}p \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}$$

Ist nun $4q < p^2$, so sind beide Wurzeln reell und negativ.

Um sie zu erhalten, setze man: $\sin v = \frac{2\sqrt{q}}{p}$, so ist:

$$x = -\frac{1}{2}p (1 \mp \cos v)$$

mithin, indem man hierin den Werth von $p = \frac{2\sqrt{q}}{\sin v}$ substituirt, die beiden Wurzeln:

$$x' = -tg \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{q} \text{ und } x'' = -\frac{\sqrt{q}}{tg \frac{1}{2}v}$$

Eben so findet man, wenn $4q < p^2$ und wiederum $\sin v = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ gesetzt wird, aus:

$$(4) \quad x^2 - px = -q$$

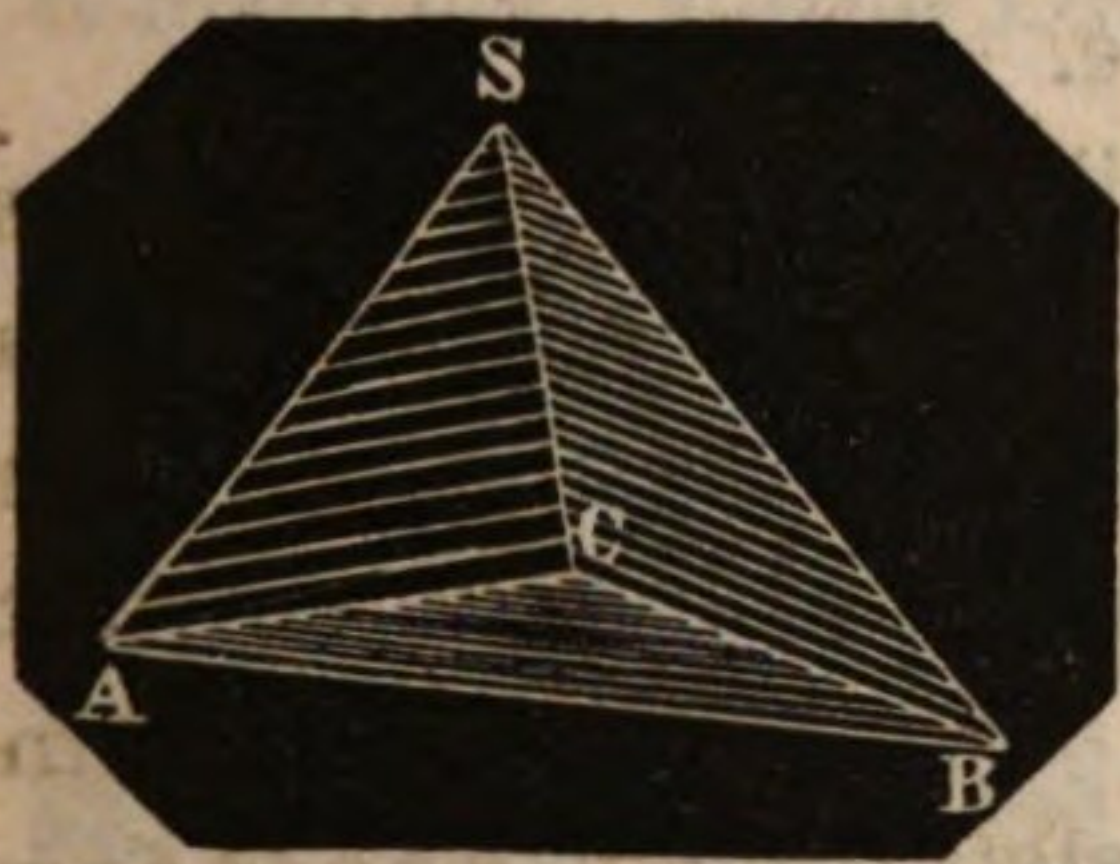
$$x' = \frac{\sqrt{q}}{tg \frac{1}{2}v} \text{ und } x'' = tg \frac{1}{2}v \cdot \sqrt{q}$$

Zweiter Theil.

Sphärische Trigonometrie.

Achtes Buch.

68.

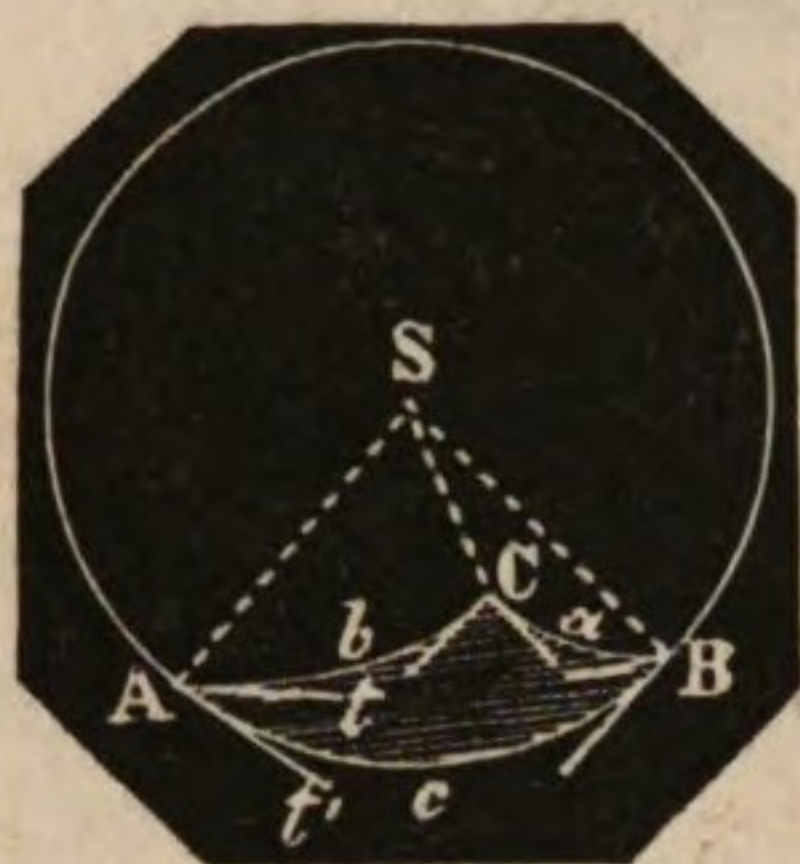


Man denke sich von einem Punkte, S, drei grade Linien ausgehend, wovon SA, SB in der Ebene des Papiers liegen mögen, die dritte Linie SC aber darüber hervortritt. Denkt man sich durch je zwei Linien eine Ebene gelegt, so ent-

steht bekanntlich eine körperliche Ecke, das sogenannte körperliche Dreieck, *) welches folgende sechs Bestandtheile enthält: 1) die drei Kantenwinkel, welche je zwei der von S ausgehenden drei Linien mit einander bilden, und 2) die drei Flächenwinkel, welche je zwei der drei Ebenen mit einander bilden.**) Man setze die drei Kantenwinkel $BSC = a$, $ASC = b$ und den unteren $ASB = c$ und bezeichne die gegenüber liegenden drei Flächenwinkel mit den gleichlautenden Buchstaben A, B, C, dann ist die allgemeine Aufgabe der sphärischen Trigonometrie: allgemeine Formeln zu finden, nach welchen man aus beliebig gegebenen drei Winkeln des körperlichen Dreiecks die drei übrigen (insofern sie durch erstere drei bestimmt sind) berechnen kann.

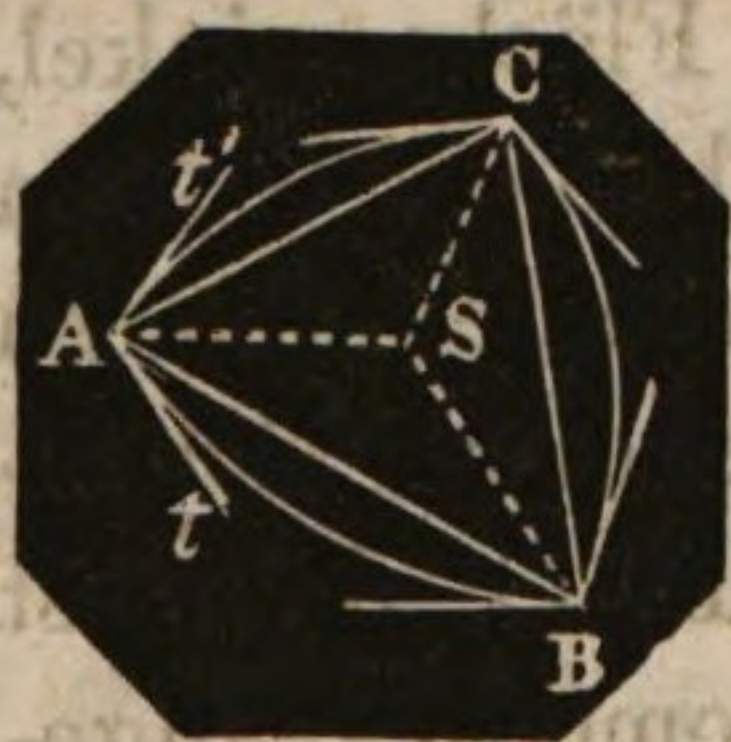
*) Die Ecke einer dreiseitigen Pyramide.

**) Man muss sich hier die beiden durch $\widehat{ASC}$ und $\widehat{BSC}$ gelegten Ebenen dachförmig gegen die untere durch $\widehat{ASB}$ gelegte Ebene aufgerichtet denken. Anfänger mögen sich diese Figur versinnlichen, was durch zweimalige Brechung eines Stück Papiers geschehen kann.



Denkt man sich aus S mit einem beliebigen Radius, SA, zwischen den Schenkeln der drei Kantenwinkel a , b , c des körperlichen Dreiecks Kreisbögen BC, AC, AB beschrieben, so enthalten diese Bögen, in Graden ausgedrückt, ebenso viel Grade als die zugehörigen Kantenwinkel an der Spitze S und können also statt dieser gesetzt und mit denselben Buchstaben a , b , c bezeichnet werden. Dies pflegt man in der Regel zu thun, und da die drei Bögen a , b , c , weil mit demselben Radius beschrieben, offenbar einen Theil von der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt S und deren Radius SA ($=SB=SC$) ist, einschliessen und Bögen grössten Kreises sind, so nennt man ein solches krummlinigtes Dreieck auf der Oberfläche einer Kugel (Sphäre) schicklicher Kugeldreieck oder sphärisches Dreieck, daher denn auch der Titel: sphärische Trigonometrie.

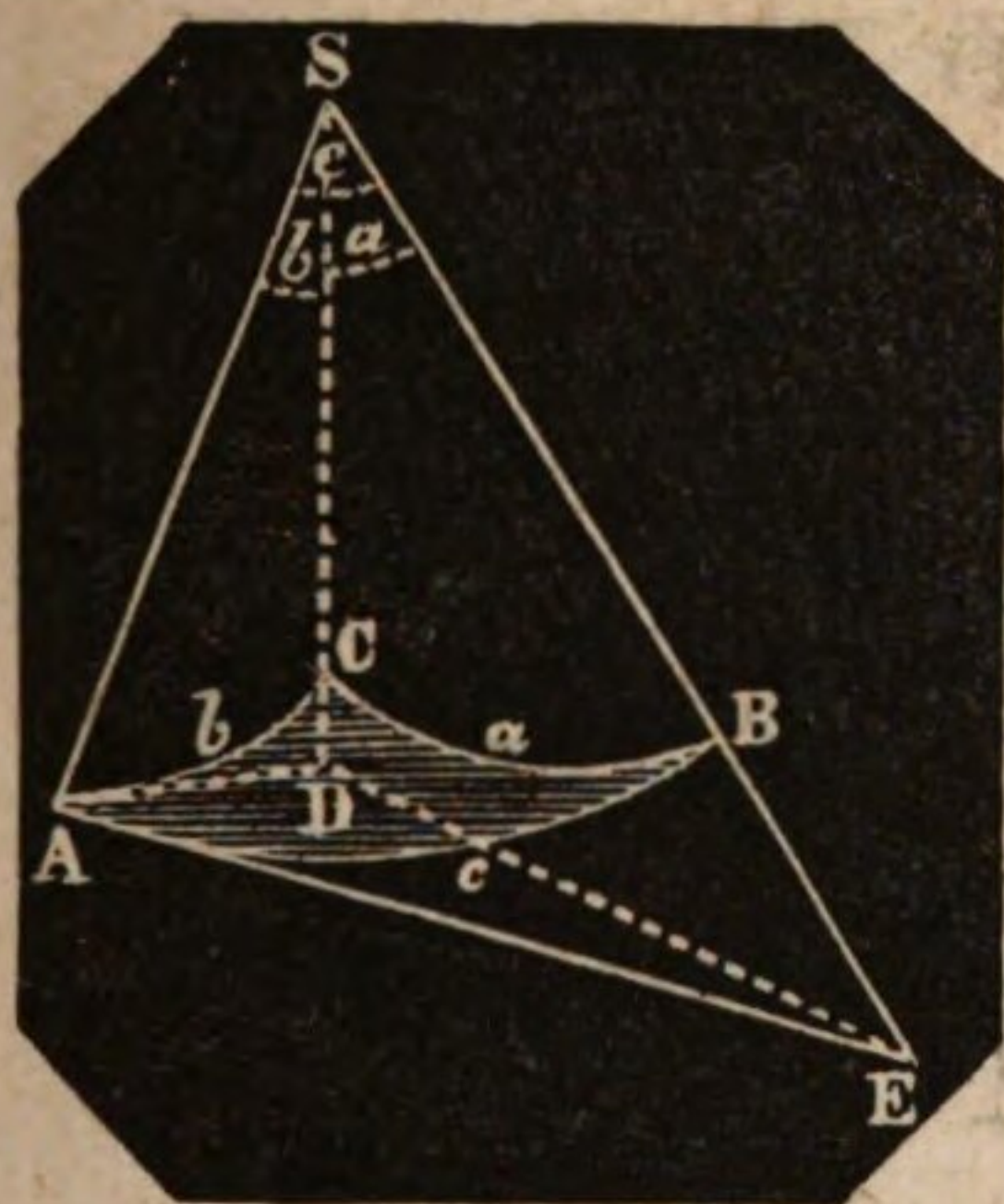
Unter Bögen oder Seiten eines sphärischen Dreiecks muss man sich also nicht Längen, sondern immer die Winkel am Mittelpunkt der zugehörigen Kugel denken, welche die von den Endpunkten der Bögen dahin gezogenen Radien (Kanten) mit einander bilden, mit anderen Worten: man muss in einem sphärischen Dreieck die Seiten (welche stets Bögen grössten Kreises sein müssen) immer in Graden ausgedrückt denken.



Zieht man aus dem Durchschnittspunkt A zweier Seiten $\widehat{BA}$, $\widehat{CA}$ eines sphärischen Dreiecks die beiden Tangenten At , At' an dieselben, mithin senkrecht auf dem *radius* SA der Kugel, und zwar die eine in der Ebene ASB, die andere in der Ebene ASC, so stellt der Winkel $tAt' = A$ den Neigungswinkel der beiden Bögen $\widehat{BA}$, $\widehat{CA}$ gegen einander dar. Ebenso an den beiden anderen Punkten B, C, und diese drei Winkel A, B, C, welche, wenn man sich das körperliche Dreieck S, ABC (vergl. Fig. zu § 69) denkt, offenbar die Flächenwinkel desselben sind, sind die eigentlichen Winkel des sphärischen Dreiecks ABC, weil man zur Abkürzung des Vortrags die drei anderen Winkel a , b , c die Seiten des sphär. Dreiecks nennt. Vergleicht man die Winkel des sphärischen

Dreiecks mit den Winkeln des Sehnendreiecks, so erhellt leicht, dass die Summe der drei (Flächen-) Winkel A, B, C eines sphärischen Dreiecks immer grösser als zwei und kleiner als sechs rechte Winkel ist. Auch ist klar, dass die Summe zweier Seiten (Kantenwinkel) immer grösser ist, als die dritte, und jede Seite (Kantenwinkel) kleiner, als 180° ist. Weil nämlich grösste Kreise sich halbiren (Geometrie § 175), so folgt, dass, wenn man durch den einen Endpunkt eines solchen Halbkreises einen Bogen grössten Kreises legt, er, verlängert, nothwendig auch durch den anderen Endpunkt gehen muss und mit ersterem Halbkreise ein sogenanntes Kugelzweieck bildet. Es kann folglich keine Seite in einem sphärischen Dreieck $= 180^\circ$ sein. Verlängert man die eine Seite eines solchen Zweiecks, so kann man durch die Endpunkte dieser zwei Bögen grössten Kreises legen, welche sich innerhalb des Zweiecks schneiden und mit ersterer Seite, $> 180^\circ$, ein Dreieck bilden, welches einen eingehenden oder überstumpfen Winkel hat; solche Dreiecke lassen wir jedoch unberücksichtigt.

71.



Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks ABC einen Winkel, z. B. A , berechnen kann.

Auflösung. Da der sphärische Winkel A nichts anderes ist, als die Neigung der beiden Ebenen ASC und ASB gegen einander, so errichten wir auf ihrer Durchschnittslinie SA , im Punkte A , die beiden Perpendikel AE und AD , wovon das erstere in der unteren Ebene ASB liegt und den verlängerten Radius SB in E trifft*), das andere in der dachförmig dagegen aufstehenden Ebene ASC liegt und den verlängerten Radius SC in D trifft, so dass also $\widehat{SAE} = 90^\circ$ und auch $\widehat{SAD} = 90^\circ$, dann ist der Winkel $DAE = A$ der gesuchte. (Geometrie § 155.)

*) Die Fälle, wo $AE \parallel SB$ oder $AD \parallel SC$ ist, oder wo ein, zwei oder alle drei Winkel, a, b, c , rechte, oder stumpfe wären, können wir als spezielle Fälle aus den allgemeinen Gleichungen ableiten. Die Schlüsse bleiben übrigens ganz dieselben, wenn z. B. der Winkel ASB stumpf wäre und der Fusspunkt A der beiden Perpendikel AE, AD auf der Verlängerung von AS über S hinaus angenommen werden müsste.

Denkt man noch DE gezogen, so hat man aus dem Dreieck DAE :

$$\cos A = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - \overline{DE}^2}{2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE}} \quad (\S 30)$$

Eben so hat man aus dem gegen ASE dachförmig aufstehenden Dreieck DSE , in welchem der Kantenwinkel $\widehat{DSE} = a$ ist (§ 69):

$$\cos a = \frac{\overline{SD}^2 + \overline{SE}^2 - \overline{DE}^2}{2 \cdot \overline{SD} \cdot \overline{SE}}$$

Hieraus den Werth von $\overline{DE}^2$ gezogen und in die erste Gleichung substituirt, kommt:

$$\cos A = \frac{2\overline{SD} \cdot \overline{SE} \cdot \cos a - (\overline{SD}^2 - \overline{AD}^2) - (\overline{SE}^2 - \overline{AE}^2)}{2\overline{AD} \cdot \overline{AE}}$$

Die beiden Dreiecke DAS , EAS sind bei A rechtwinklig, SD und SE die Hypotenusen, daher $\overline{SD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{AS}^2$, eben so $\overline{SE}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{AS}^2$, mithin:

$$\cos A = \frac{2 \cdot \overline{SD} \cdot \overline{SE} \cdot \cos a - 2\overline{AS}^2}{2\overline{AD} \cdot \overline{AE}}$$

$$\cos A = \frac{\overline{SD}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{SE}}{\overline{AE}} \cdot \cos a - \frac{\overline{AS}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{AS}}{\overline{AE}}$$

Nun ist in dem bei A rechtwinkligen Dreieck SAD , $\frac{\overline{AD}}{\overline{SD}} = \sin b$, mithin $\frac{\overline{SD}}{\overline{AD}} = \frac{1}{\sin b}$; ferner: $\frac{\overline{AS}}{\overline{AD}} = \cot b = \frac{\cos b}{\sin b}$. Im rechtwinkligen Dreieck SAE ist $\frac{\overline{AE}}{\overline{SE}} = \sin c$, also: $\frac{\overline{SE}}{\overline{AE}} = \frac{1}{\sin c}$; ferner $\frac{\overline{AS}}{\overline{AE}} = \cot c = \frac{\cos c}{\sin c}$; dies substituirt, hat man:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

In dieser Gleichung ist von Lineargrößen keine Spur mehr vorhanden. Für die beiden andern Winkel B und C ist offenbar eben so:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

Wäre, als specieller Fall, jede der drei Seiten des sphärischen Dreiecks, $a, b, c, = 90^\circ$, so wäre $\cos A = 0, \cos B = 0, \cos C = 0$, also auch $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$; sind alle drei Seiten $a, b, c, > 90^\circ$, so sind auch alle drei Winkel A, B, C stumpf, weil dann ihre *cosinus* negativ.

Die vorstehenden Formeln, nach welchen man aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die Winkel berechnen kann, sind zwar die Fundamentalformeln der ganzen sphärischen Trigonometrie, indem alle übrigen daraus abgeleitet werden können, für die logarithmische Rechnung sind sie aber etwas unbequem und wir wollen deshalb noch eine für die numerische Rechnung bequemere daraus ableiten. Man hat aus:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$1 - \cos A = 1 - \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin b \cdot \sin c - \cos a + \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \cdot \sin c} \text{ also (§ 52, 41):}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{2 \sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin b \cdot \sin c},$$

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}} \dots\dots\dots (1)$$

$$1 + \cos A = 1 + \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin b \cdot \sin c + \cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \cdot \sin c} \text{ (§ 52)}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{2 \sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}} \dots\dots\dots (2)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}} \dots\dots\dots (3)$$

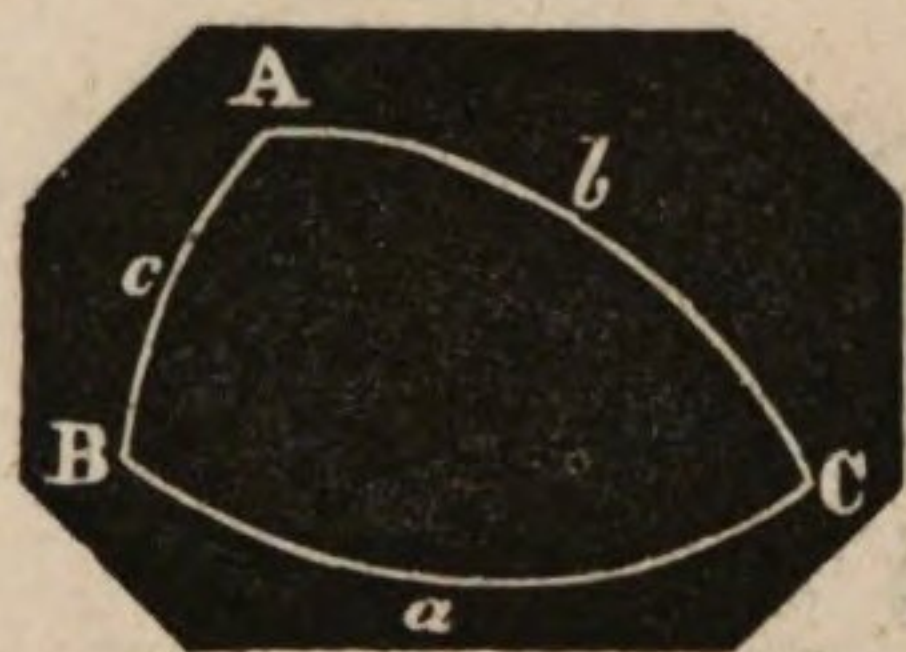
Von diesen drei Formeln ist die letztere vorzuziehen, weil die Tangenten immer die grössten Differenzen haben. Sie lässt sich aber noch etwas vereinfachen. Setzt man nämlich:

$$a + b + c = s, \text{ also } \frac{a + b + c}{2} = \frac{1}{2}s; \quad \frac{a + b - c}{2} = \frac{1}{2}s - c \text{ etc., so ist:}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - b) \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - a)}}$$

Zahlenbeispiele hiezu siehe § 91.

73.



Lehrsatz. In jedem sphärischen Dreieck verhalten sich die *sinus* der Winkel, wie die *sinus* der gegenüber liegenden Seiten. In Zeichen:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}; \quad \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin c}; \quad \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin c}$$

Beweis. Es folgt aus $\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$ (§ 71):

$$1 - \cos^2 A = 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

$$\sin^2 A = \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

Nun ist aber $\sin^2 b \sin^2 c = (1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) = 1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c$. Letzterer Ausdruck statt $\sin^2 b \cdot \sin^2 c$ gesetzt, kommt:

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

In dieser Gleichung ist der Zähler rechter Hand offenbar eine symmetrische Function von a, b, c (d. h. die Verwechslung dieser Grössen bringt keine Veränderung hervor); setzen wir ihn Kürze halber $= z^2$, so ist:

$$\sin A = \frac{z}{\sin b \cdot \sin c} \dots \dots \dots (1)$$

Werden die beiden anderen Gleichungen:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} \quad \text{und} \quad \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

ebenso behandelt, so kommt, was auch ohne Rechnung klar ist, indem der Zähler rechter Hand, weil eine symmetrische Function von a, b, c , in beiden Fällen offenbar ganz derselbe, wie in (1) ist:

$$\sin B = \frac{z}{\sin a \sin c} \dots\dots (2) \quad \sin C = \frac{z}{\sin a \sin b} \dots\dots (3)$$

Die Gleichungen 1, 2, 3 paarweise durch einander dividirt, kommt, wie behauptet, $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b}$ etc., oder auch, weil die Seiten doch in Graden ausgedrückt (Winkel) sind, so geschrieben:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

74.

Aufgabe. Eine allgemeine Formel zu finden, nach welcher man aus den drei Winkeln A, B, C eines sphärischen Dreiecks eine Seite, z. B. a , berechnen kann.

Auflösung. Die drei Fundamentalgleichungen (§ 71):

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}$$

enthalten die drei gegebenen Grössen, A, B, C und drei unbekannte a, b, c . Um die unbekannte a zu finden, eliminiren wir die beiden andern b, c , oder nur $\cos b, \cos c$, indem, zufolge § 73, $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ und $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$, mithin $\sin b$ durch $\sin a \cdot \frac{\sin B}{\sin A}$ und $\sin c$ durch $\sin a \cdot \frac{\sin C}{\sin A}$ ersetzt werden kann.

Reduciren wir, um zuerst $\cos b$ zu eliminiren, jede der drei Gleichungen auf $\cos b$, so kommt:

$$\cos b = \frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c}$$

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos b = \frac{\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C}{\cos a}$$

Diese für $\cos b$ gefundenen Ausdrücke paarweise gleich gesetzt, geben folgende zwei neue Gleichungen:

$$\frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c} = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \dots (1)$$

$$\frac{\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C}{\cos a} = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \dots (2)$$

Um aus diesen beiden Gleichungen $\cos c$ zu eliminiren, reducire man jede auf $\cos c$. Die erste giebt:

$$\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \cos a \cdot \cos^2 c + \sin a \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B$$

$$\cos a (1 - \cos^2 c) - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B$$

$$\cos a \cdot \sin^2 c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B$$

$$\cos c = \frac{\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A}{\sin a \cdot \cos B}$$

Aus der Gleichung (2) folgt:

$$\cos c - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \cos^2 a \cdot \cos c + \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos c (1 - \cos^2 a) - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos c \cdot \sin^2 a - \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C = \sin a \cdot \cos a \cdot \sin c \cdot \cos B$$

$$\cos c = \frac{\cos a \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos C}{\sin a}$$

Die beiden für $\cos c$ erhaltenen Ausdrücke gleich gesetzt, geben:

$$\frac{\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A}{\sin a \cdot \cos B} = \frac{\cos a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \cos C}{\sin a}$$

Aus dieser Endgleichung folgt:

$$\cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A = \cos a \cdot \sin c \cdot \cos^2 B + \sin b \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$\cos a \cdot \sin c (1 - \cos^2 B) = \sin b \cdot \cos A + \sin b \cdot \cos B \cdot \cos C$$

$$\cos a \cdot \sin c \cdot \sin^2 B = \sin b (\cos A + \cos B \cdot \cos C)$$

$$\cos a = \frac{\sin b (\cos A + \cos B \cdot \cos C)}{\sin c \cdot \sin^2 B}$$

Nach § 73 kann man aber $\frac{\sin B}{\sin C}$ statt $\frac{\sin b}{\sin c}$ setzen, mithin ist auch, nach gehöriger Reduction:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\text{eben so: } \cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}$$

75.

Vorstehende Formeln, welche mit den Grundformeln eine auffallende Aehnlichkeit haben, sind aber, eben so wie jene, für die logarithmische Rechnung etwas unbequem. Auf dieselbe Weise aber, wie in § 72, lassen sich bequemere daraus ableiten. Man hat nämlich aus:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$1 - \cos a = 1 - \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{\sin B \cdot \sin C - \cos A - \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{-(\cos A + \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} a = - \left\{ \frac{\cos A + \cos(B+C)}{\sin B \cdot \sin C} \right\}$$

$$2 \sin^2 \frac{1}{2} a = - \frac{2 \cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\sin B \cdot \sin C} \quad (\S 52.)$$

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\sin B \cdot \sin C}} \dots\dots (1)$$

Das Imaginaire dieser Formel ist nur scheinbar, denn da (§ 70) $A + B + C > 180^\circ$ und $< 540^\circ$, so ist auch $\frac{A+B+C}{2} > 90^\circ$ und $< 270^\circ$ und folglich $\cos \frac{A+B+C}{2}$ immer eine negative Grösse, welche durch das davor stehende nothwendige Minus-Zeichen positiv gemacht wird.

Ferner hat man auch:

$$1 + \cos a = 1 + \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{\sin B \cdot \sin C + \cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{\cos A + \cos(B-C)}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$2 \cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{2 \cos \frac{A+B-C}{2} \cdot \cos \frac{A+C-B}{2}}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\cos \frac{A+B-C}{2} \cdot \cos \frac{A+C-B}{2}}{\sin B \cdot \sin C}} \dots \dots (2)$$

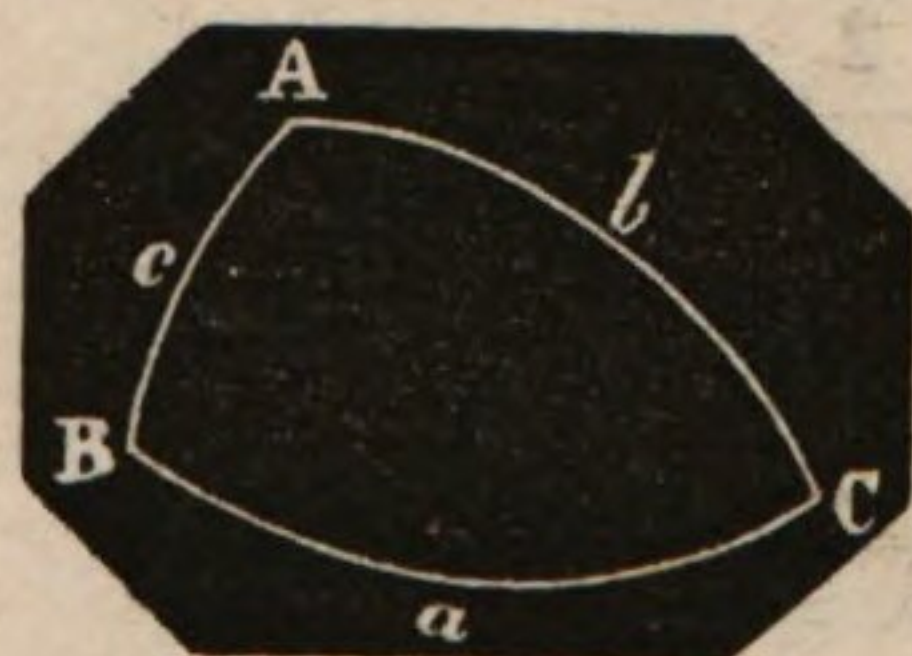
Dividirt man (1) durch (2), so erhält man die practisch immer sichere Formel:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{A+B+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C-A}{2}}{\cos \frac{A+B-C}{2} \cdot \cos \frac{A+C-B}{2}}}$$

oder, wenn man wieder $A + B + C = S$ setzt, kürzer:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2} S \cdot \cos (\frac{1}{2} S - A)}{\cos (\frac{1}{2} S - B) \cdot \cos (\frac{1}{2} S - C)}}$$

76.



Aufgabe. Eine Gleichung zwischen vier auf einander folgenden Stücken eines sphärischen Dreiecks, z. B. für A, c, B, a zu finden, so dass man, wenn irgend drei davon gegeben sind, das vierte darnach berechnen kann.

Auflösung. Die Elimination von $\cos b$ aus den beiden Grundformeln

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c} \\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c} \end{aligned} \right\} \text{ giebt § 74:}$$

$$\cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B = \frac{\cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A}{\cos c}$$

$$\cos a \cdot \cos^2 c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B = \cos a - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\sin a \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos B = \cos a (1 - \cos^2 c) - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

$$\sin a \cdot \cos c \cdot \cos B = \cos a \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos A$$

$$\cos c \cdot \cos B = \frac{\cos a}{\sin a} \cdot \sin c - \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \cos A$$

$$\cos c \cdot \cos B = \cot a \cdot \sin c - \frac{\sin B}{\sin A} \cdot \cos A \quad (\S 73)$$

$$\cot A \sin B + \cos B \cdot \cos c = \cot a \cdot \sin c$$

Obgleich sich diese Formel, um darnach aus drei gegebenen Grössen die vierte zu finden, durch Einführung eines Hülfswinkels für die logarithmische Rechnung bequemer machen lässt, so werden wir doch für diesen practischen Zweck noch bequemere Formeln finden, und legen ihr deshalb auch nur eine theoretische Wichtigkeit bei.

77.

Zufolge der § 72 gefundenen Gleichungen ist:

$$1, \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b-c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$2, \sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{b+c-a}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin a \cdot \sin c}}$$

$$3, \sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+c-b}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin a \cdot \sin b}}$$

$$4, \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin b \cdot \sin c}}$$

$$5, \cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin a \cdot \sin c}}$$

$$6, \cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin \frac{a+b+c}{2} \cdot \sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin a \cdot \sin b}}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit der fünften und dividirt durch die sechste etc., wie nachfolgend durch $\frac{(1).(5)}{(6)}$ etc. angedeutet, so kommt:

$$\frac{(1).(5)}{(6)}; \frac{\sin \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{a+c-b}{2}}{\sin c} \dots\dots (7)$$

$$\frac{(2).(4)}{(6)}; \frac{\cos \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{b+c-a}{2}}{\sin c} \dots\dots (8)$$

$$\frac{(4).(5)}{(3)}; \frac{\cos \frac{1}{2} A \cdot \cos \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{a+b+c}{2}}{\sin c} \dots\dots (9)$$

$$\frac{(1).(2)}{(3)}; \frac{\sin \frac{1}{2} A \cdot \sin \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{\sin \frac{a+b-c}{2}}{\sin c} \dots\dots (10)$$

Durch paarweise Addition und Subtraction dieser vier Gleichungen erhält man mit Berücksichtigung der Formeln 9, 10, 11, 12, 16, 30, 31 § 100:

$$(7)+(8); \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{a-b}{2}}{2 \sin \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{1}{2} c} \dots\dots (11)$$

$$(7)-(8); \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{1}{2} C} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} c \cdot \sin \frac{a-b}{2}}{2 \sin \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{1}{2} c} \dots\dots (12)$$

$$(9)-(10); \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{1}{2} c}{2 \sin \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{1}{2} c} \dots\dots (13)$$

$$(9)+(10); \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{1}{2} c}{2 \sin \frac{1}{2} c \cdot \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{1}{2} c} \dots\dots (14)$$

78.

Aus den vier letztern Formeln folgt nun, dass:

$$\sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}C \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}C \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\sin \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}C \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}C \cdot \sin \frac{a+b}{2}$$

Diese vier merkwürdigen, von Gauss gefundenen Gleichungen, von welchen jede alle sechs Stücke des sphärischen Dreiecks enthält und von welchen in der theoria motus so vielfacher Gebrauch gemacht ist, hat seinerseits Delambre auch gefunden,*) jedoch ihre Wichtigkeit ganz übersehen. Sie dienen nämlich dem Astronomen, der oft sphärische Dreiecke zu berechnen hat, zur Controlle. Hierauf hat zuerst Gauss aufmerksam gemacht und ihren Nutzen hervorgehoben.**)

Anmerkung. Weil sowohl jeder Winkel als jede Seite im sphärischen Dreieck immer kleiner als 180° , mithin auch $\sin \frac{1}{2}C$ und $\cos \frac{1}{2}c$ immer positiv ist, so folgt aus der zweiten Formel, nämlich aus:

$$\cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{1}{2}c = \sin \frac{1}{2}C \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$

dass $\cos \frac{A+B}{2}$ und $\cos \frac{a+b}{2}$ immer einerlei Vorzeichen haben, mithin die Summe zweier Seiten mit der Summe der beiden ihnen gegenüber liegenden Winkel immer gleichartig ist, d. h.: beiderlei Summen sind gleichzeitig über, unter oder just gleich 180° . In Zeichen, wenn:

$$A+B \gtrless 180^\circ, \text{ so ist zugleich auch } a+b \gtrless 180^\circ.$$

*) Connaissance des tems 1808.

**) Göttinger Gelehrten - Anzeigen 1811, S. 1984.

Nach diesem wichtigen Satze kann man oftmals entscheiden, ob ein sphärisches Dreieck durch gegebene Stücke bestimmt oder zweideutig ist.

79.

Dividirt man die vorstehenden vier Gleichungen paarweise durch einander, so erhält man die schon früher auf anderem Wege von Napier gefundenen und nach ihm benannten Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A+B}{2} &= \cot \frac{1}{2} C \cdot \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \\ \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} &= \cot \frac{1}{2} C \cdot \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \end{aligned} \right\}$$

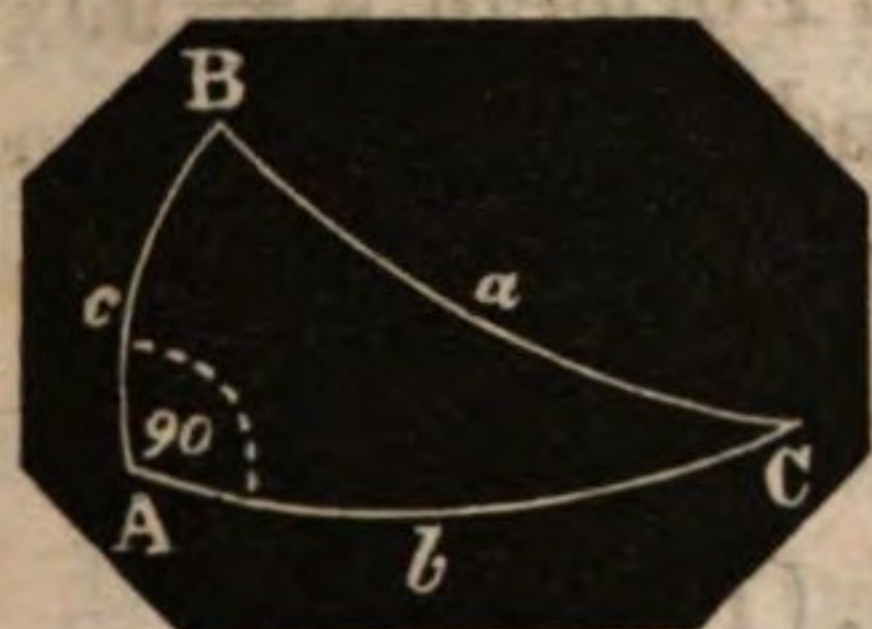
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{a+b}{2} &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \\ \operatorname{tg} \frac{a-b}{2} &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \cdot \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} \end{aligned} \right\}$$

Das erste Paar dieser Gleichungen ist immer anzuwenden, wenn von einem sphärischen Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, das zweite Paar dagegen, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind.

Neuntes Buch.

Rechtwinkliges sphärisches Dreieck.

80.



Erklärung. In einem bei A rechtwinkligen sphärischen Dreieck, ABC, heissen die den rechten Winkel einschliessenden Seiten b und c Catheten und die ihm gegenüber liegende Seite a die Hypotenuse. Es ist leicht einzusehen, dass beim rechtwinkligen sphärischen Dreieck der Fall vorkommen kann, wo die Hypotenuse kleiner ist, als jede der beiden Catheten. (Man denke sich nur auf einem Erdglobus A als Pol und die Catheten b , c als Meridiane und beide über den Aequator hinaus verlängert, die Endpuncte dann durch einen Bogen grössten Kreises verbunden.)

Das rechtwinklige Dreieck kommt bei Anwendungen der sphärischen Trigonometrie am häufigsten vor und deshalb wollen wir noch die besondern Formeln für dasselbe aufstellen. Es ist klar, dass diese besondern Formeln aus den vorhin gefundenen allgemeinen sehr leicht abgeleitet werden können und viel einfacher sein werden.

81.

Die vorhin gefundenen allgemeinen Formeln, in welchen der Winkel A vorkommt, sind:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c}$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C}$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \sin B}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$\cot A \cdot \sin B + \cos B \cdot \cos c = \cot a \cdot \sin c$$

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

$$\cot B \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos c = \cot b \cdot \sin c$$

$$\cot C \cdot \sin A + \cos A \cdot \cos b = \cot c \cdot \sin b$$

82.

Setzt man nun in allen diesen vorstehenden Formeln $A = 90^\circ$ und beachtet, dass $\cos 90^\circ = 0$; $\sin 90^\circ = 1$ und $\cot 90^\circ = 0$, so erhält man die folgenden sechs, viel einfachern Formeln für das bei A rechtwinklige sphärische Dreieck ABC :

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c \dots\dots (1)$$

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \dots\dots (2)$$

$$\cos a = \cot B \cdot \cot C \dots\dots (3)$$

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C} \left. \begin{array}{l} \cos c = \frac{\cos C}{\sin B} \end{array} \right\} \dots\dots (4)$$

$$\cos B = \cot a \cdot \operatorname{tg} c \left. \begin{array}{l} \cos C = \cot a \cdot \operatorname{tg} b \end{array} \right\} \dots\dots (5)$$

$$\cot B = \cot b \cdot \sin c \left. \begin{array}{l} \cot C = \cot c \cdot \sin b \end{array} \right\} \dots\dots (6)$$

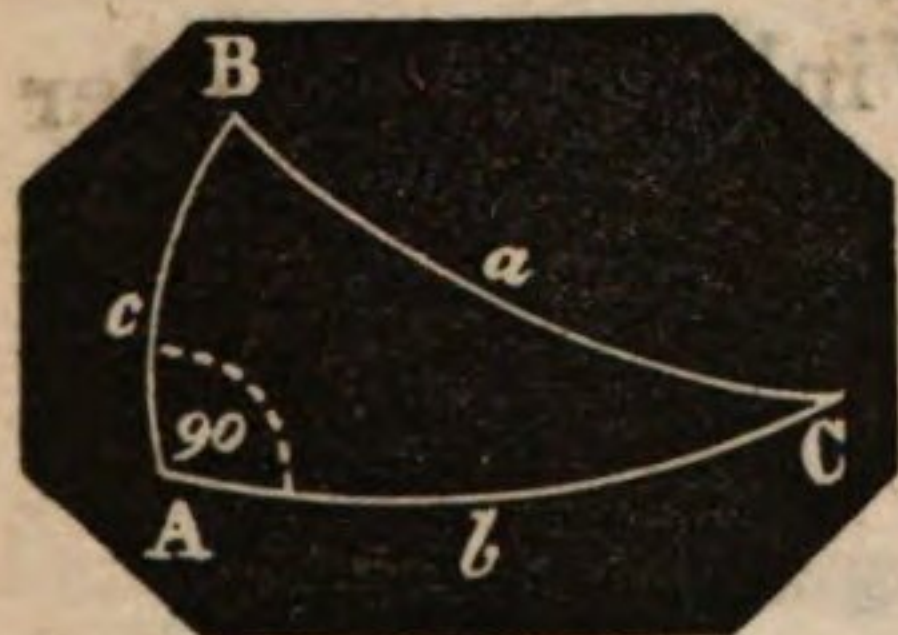
83.

Nach vorstehenden sechs Formeln kann man also, wenn von einem rechtwinkligen sphärischen Dreieck, ABC (ausser dem rechten Winkel A) irgend zwei Stücke gegeben sind, jedes der drei andern leicht finden. Wäre z. B. b und C gegeben und B gesucht, so folgt aus der vierten Formel: $\cos B = \cos b \cdot \sin C$. Um jedoch diese für den practischen Astronomen und Steuer- mann wichtigen Formeln leichter behalten und anwenden zu können, merke man sich folgende, schon von Napier gegebene leichte Gedächtnissregel.

Wenn man den rechten Winkel A ausser Acht lässt, so sind je drei der übrigen fünf Stücke so geordnet, dass immer ein Stück die Mitte bildet, und dann die beiden andern Stücke entweder unmittelbar zu beiden Seiten mit dem Mittelstücke verbunden oder noch durch ein Stück vom Mittel getrennt sind, wobei aber, wie gesagt, der rechte Winkel nicht mitzählt, die beiden Catheten also, als nicht durch ihn getrennt, sondern als unmittelbar an einander liegend zu betrachten sind. Hat man diese Ordnung unter irgend drei Stücken im sphärischen Dreieck heraus gefunden, so lautet die einfache Regel: Es ist allemal der *cosinus* der Mitte gleich dem Product aus den *sinus* der beiden getrennten, und auch gleich dem Product aus den *cotangenten* der beiden verbundenen Stücke, wobei aber statt der trigonometrischen Function einer *Cathete* immer ihre sinnverwandte gesetzt werden muss.

Dass in dieser leicht zu behaltenden Gedächtnissregel alle in § 82 aufgestellten sechs Formeln für das rechtwinklige sphärische Dreieck wirklich enthalten sind, wollen wir jetzt nachweisen, und dabei zugleich diese Regel einüben.

84.



Aufgabe. Eine Gleichung zwischen den drei Seiten a, b, c eines sphärischen Dreiecks zu finden.

Auflösung. Die Hypotenuse a ist hier offenbar die Mitte, die Cathete b durch den Winkel C und die Cathete c durch den Winkel B davon getrennt. Daher nach obiger Regel: $\cos a = \sin b \cdot \sin c$, also, weil

b und c Catheten sind, und statt der trigonometrischen Functionen derselben nach der Vorschrift ihre sinnverwandten gesetzt werden sollen, so erhält man die Formel (1) § 82, nämlich:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c$$

Aus dieser unzweideutigen Formel folgt, dass, wenn $\cos b$ und $\cos c$ einerlei Vorzeichen haben, die Hypotenuse $< 90^\circ$ ist.

85.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen zwei Catheten b, c und einem schiefen Winkel B zu finden.

Auflösung. Weil der rechte Winkel nicht mitzählt, so ist hier offenbar c die Mitte, B und b sind unmittelbar damit verbunden, daher: $\cos c = \cot B \cdot \cot b$, mithin weil b und c Catheten sind:

$$\sin c = \cot B \cdot \tan b, \text{ hieraus:}$$

$$\cot B = \frac{\sin c}{\tan b} (= \sin c \cdot \cot b) \cdot (\S 82, (6))$$

Diese Formel zeigt, dass, weil alle Winkel und Seiten $< 180^\circ$, also $\sin c$ immer positiv ist, $\cot B$ und $\cot b$ immer einerlei Vorzeichen haben, mithin im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ein Winkel und die ihm gegenüber liegende Seite, z. B. B und b , immer gleichartig sind, d. h. wenn:

$$B \leq 90^\circ, \text{ auch } b \leq 90^\circ$$

Durch obige Formel: $\cot B = \sin c \cdot \cot b$ ist also sowohl B als b vollkommen bestimmt. Die aus B und b zu berechnende Cathete c aber $\left(\sin c = \frac{\cot B}{\cot b} = \frac{\tan b}{\tan B} \right)$ bleibt zweideutig, wenn man nicht weiss, ob der ihr gegenüber liegende Winkel C spitz oder stumpf ist.

86.

Aufgabe. Man suche eine Gleichung zwischen der Hypotenuse a , der Cathete b und dem Winkel B .

Auflösung. Weil der rechte Winkel nicht mitzählt, so ist hier b die Mitte, a durch C , und B durch c davon getrennt, daher: $\cos b = \sin a \cdot \sin B$, mithin, weil b eine Cathete ist:

$$\sin b = \sin a \cdot \sin B \quad (\S 82, (2))$$

Durch diese Formel sind die Grössen b und B , weil gleichartig, vollkommen bestimmt (§ 85). Was aber die durch ihren *sinus* gegebene Hypotenuse a betrifft, so ist sie im Allgemeinen zweideutig. Weil jedoch $A + B$ oder (weil $A = 90$), $90 + B$ mit $a + b$ gleichartig ist, so sind die besonderen Fälle, wo a bestimmt ist, folgende:

1) Wenn $B = 90^\circ$, also auch $b = 90^\circ$, so ist auch $a = 90^\circ$.

2) Sei $B < 90$, also auch $b < 90$ und auch $a + b < 180^\circ$.

Giebt es nun von den beiden Werthen von a nur einen, der zu b addirt $< 180^\circ$ giebt, so ist a bestimmt.

3) Sei $B > 90$, also auch $a + b > 180^\circ$. Giebt es nun unter den beiden Werthen für a nur einen, der zu b addirt $> 180^\circ$ giebt, so ist a bestimmt, sonst nicht.

87.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen den zwei schiefen Winkeln B , C und einer Cathete b zu finden.

Auflösung. Hier ist B die Mitte, von welcher C durch a und b durch c getrennt ist, daher $\cos B = \sin C \cdot \sin b$, mithin, weil b eine Cathete ist:

$$\cos B = \sin C \cdot \cos b \quad (\S 82 (4)).$$

Durch diese Formel sind B und b vollkommen bestimmt, C aber bleibt zweideutig.

88.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen der Hypotenuse a und den zwei schiefen Winkeln B und C zu finden.

Auflösung. Hier ist a die Mitte, B und C damit verbunden, mithin:

$$\cos a = \cot B \cdot \cot C \quad (\S 82, (3))$$

89.

Aufgabe. Eine Gleichung zwischen a , c , B zu finden.

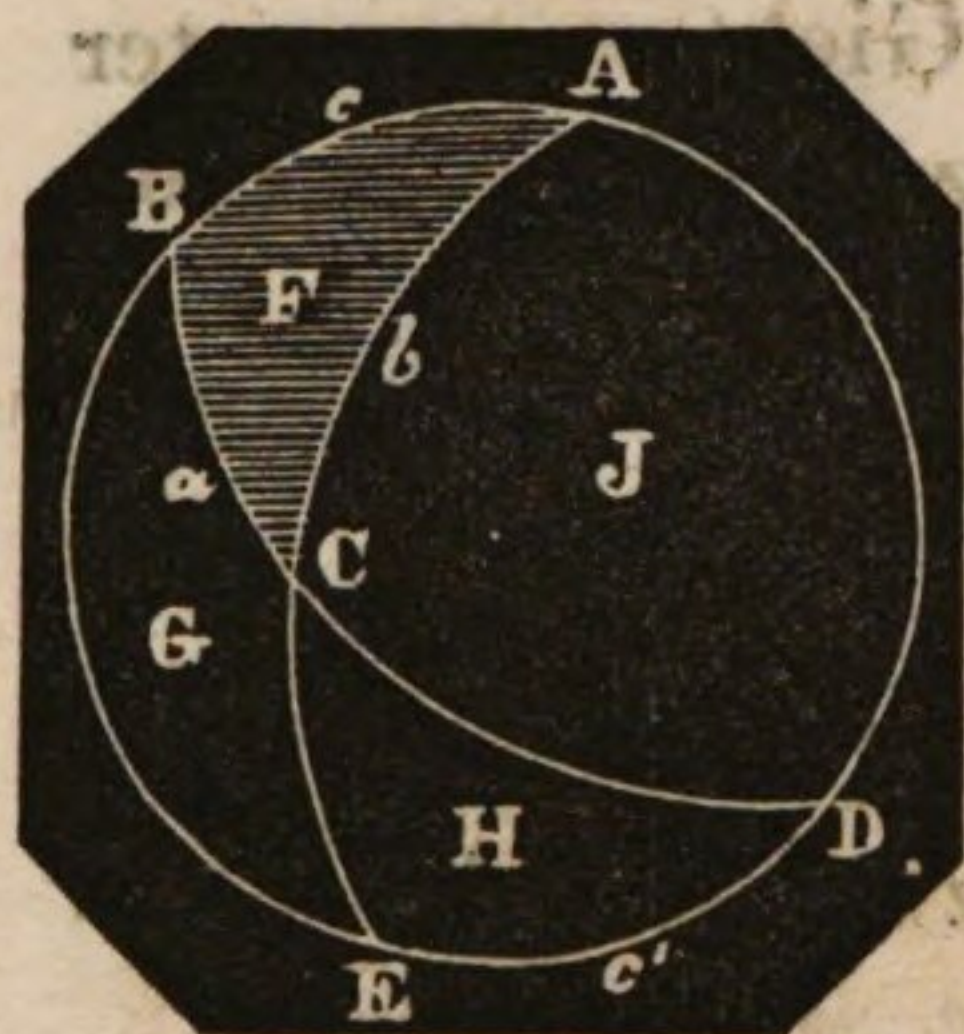
Auflösung. Hier ist B die Mitte, a und c damit verbunden, daher $\cos B = \cot a \cdot \cot c$, oder, weil c eine Cathete ist:

$$\cos B = \cot a \cdot \operatorname{tg} c \quad (82 \text{ (5)}).$$

Man sieht also, dass diese leichte Gedächtnissregel wirklich alle sechs in § 82 für das rechtwinklige sphärische Dreieck aufgestellten Formeln umfasst.

90.

Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks.



Lehrsatz. Bezeichnet F den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks, ABC , und r den *radius* der zugehörigen Kugel, so ist:

$$F = \frac{A + B + C - 180}{180} \cdot r^2 \pi$$

Beweis. Der leichtern Vorstellung halber nehme man eine Kugel zur Hand und zeichne darauf ein sphärisches Dreieck, ABC , verlängere je zwei Bögen desselben vorwärts und rückwärts, bis sie sich abermals schneiden, so wird dadurch die ganze Oberfläche der Kugel in acht Dreiecke getheilt, wovon jedoch hier nur die auf der obern Hälfte liegenden vier, F , G , H , J , zu sehen sind. Weil nun jeder grösste Kreis $ABEDA$ die Kugel halbirt und zwei grösste Kreise wie ABE , ACE sich gegenseitig halbiren, so ist klar, dass die vier Dreiecke F , G , H , J wirklich die halbe Kugeloberfläche ($2r^2 \pi$) einnehmen; ferner, dass die Verlängerung der beiden Seiten a , b über A und B hinaus, mit c ein Dreieck, H' , auf der andern Seite der Kugel bilden, welches dem Dreieck H , wenn auch symmetrisch, doch an Grösse vollkommen gleich ist, weil sie aus gleich grossen Bögen gebildet sind. (So ist z. B. $c' = c$, weil beide zu $\widehat{BE}$ addirt einen Halbkreis geben.)

Nun ist der Streifen der Kugeloberfläche, welchen die beiden Halbkreise ABE und ACE einschliessen, das sogenannte Kugel-

zweieck, der eben so vielste Theil von der ganzen Kugeloberfläche, als es der sphärische Winkel A von 360^0 ist, daher:

$$F + G = \frac{A}{360} \cdot 4r^2 \pi \dots \dots \dots (1)$$

Eben so ist der Flächeninhalt der von den beiden Halbkreisen BAD, BCD gebildeten Zweiecks, nämlich:

$$F + J = \frac{B}{360} \cdot 4r^2 \pi \dots \dots \dots (2)$$

Ferner bildet das Dreieck F mit dem auf der andern Seite der Kugel liegenden Dreieck H' ein Kugelzweieck, dessen Fläche

$$F + H' = \frac{C}{360} \cdot 4r^2 \pi, \text{ daher, weil } H = H'$$

$$F + H = \frac{C}{360} \cdot 4r^2 \pi \dots \dots \dots (3)$$

Addirt man die Gleichungen, so ist:

$$3F + G + H + J = \frac{A + B + C}{360} \cdot 4r^2 \pi$$

Zieht man hievon $F + G + H + J = 2r^2 \pi$ ab, so ist:

$$2F = \frac{A + B + C}{360} \cdot 4r^2 \pi - 2r^2 \pi$$

$$F = \left(\frac{A + B + C}{180} - 1 \right) r^2 \pi$$

$$F = \frac{A + B + C - 180}{180} \cdot r^2 \pi$$

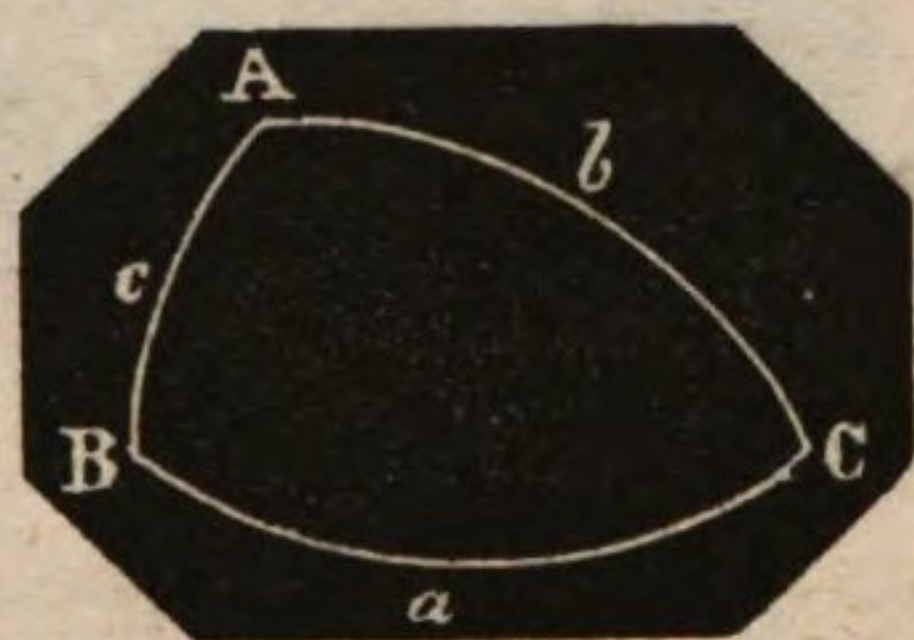
oder, wenn man den Ueberschuss der drei sphärischen Winkel A, B, C über 180^0 , den sogenannten sphärischen Excess mit e bezeichnet:

$$F = \frac{e}{180} \cdot r^2 \pi.$$

Zehntes Buch.

Beispiele zur numerischen Berechnung eines sphärischen Dreiecks.

91.



Aufgabe. Es sind alle drei Seiten eines sphärischen Dreiecks gegeben:

$$a = 72^{\circ} 14' 26'', \quad b = 110^{\circ} 18' 20'', \quad c = 48^{\circ} 50' 42''$$

Man suche die Winkel A, B, C.

Auflösung. Zufolge § 72 hat man:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - b) \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - a)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a) \sin(\frac{1}{2}s - c)}{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin(\frac{1}{2}s - a) \sin(\frac{1}{2}s - b)}{\sin \frac{1}{2}s \cdot \sin(\frac{1}{2}s - c)}}$$

$$a = 72^{\circ} 14' 26''$$

$$\frac{1}{2}s = 115^{\circ} 41' 44''$$

$$b = 110^{\circ} 18' 20''$$

$$\frac{1}{2}s - a = 43^{\circ} 27' 18''$$

$$c = 48^{\circ} 50' 42''$$

$$\frac{1}{2}s - b = 5^{\circ} 23' 24''$$

$$s = 231^{\circ} 23' 28''$$

$$\frac{1}{2}s - c = 66^{\circ} 51' 2''$$

$$\begin{array}{rcl}
 \log \sin(\frac{1}{2}s - b) & = & 8,9728253 \\
 \dots \sin(\frac{1}{2}s - c) & = & 9,9635435 \\
 \hline
 & & 18,9363688 \\
 & & 19,7922306
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 \log \sin \frac{1}{2}s & = & 0,9547781 \\
 \dots \sin(\frac{1}{2}s - a) & = & 9,8374525 \\
 \hline
 & & 19,7922306
 \end{array}$$

2) $0,1441382 - 1$ (Algebra § 281)

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}A = 9,5720691 - 10$$

$$\frac{1}{2}A = 20^\circ 28' 15'', 9$$

Eben so findet man $\frac{1}{2}B$ und $\frac{1}{2}C$, mithin ist:

$$A = 40^\circ 56' 31'', 8; \quad B = 139^\circ 48' 35'', 4; \quad C = 31^\circ 12' 13'', 5$$

92.

Aufgabe. Es sind zwei Seiten, b , c , und ein Gegenwinkel, B , gegeben. Man sucht den anderen Gegenwinkel C . Es sei z. B. $b = 110^\circ 18' 20''$, $c = 48^\circ 50' 42''$, $B = 139^\circ 48' 35'', 4$.

Auflösung. In diesem Fall gebraucht man immer die Regel der vier *sinus*. Diese giebt: $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin b}$, hieraus:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin b} \cdot \sin B$$

Anmerkung. Da hier der Winkel C durch seinen *sinus* bestimmt wird und deshalb sowohl spitz als stumpf sein kann, so ist klar, dass durch zwei Seiten und einen Gegenwinkel im Allgemeinen ein sphärisches Dreieck nicht bestimmt ist (vergl. § 29).

Weil aber $B + C$ mit $b + c$ gleichartig ist (§ 78 Anmerkung), so können wir jedoch folgendes festsetzen:

1) Ist $b + c = 180^\circ$, so ist auch $B + C = 180^\circ$, mithin:

$$C = 90^\circ, \text{ wenn } B = 90^\circ$$

$$C > 90^\circ \quad „ \quad B < 90^\circ$$

$$C < 90^\circ \quad „ \quad B > 90^\circ$$

2) Ist $b + c < 180^\circ$, also auch $B + C < 180^\circ$, so ist:

$$C < 90^\circ \text{ wenn } B \geq 90^\circ.$$

Ist aber $B < 90$, so ist C unbestimmt. Kann jedoch C nur auf eine Weise so genommen werden, dass $B + C < 180$, so ist C bestimmt.

3) Ist endlich $b + c > 180$, also auch $B + C > 180$, so ist:

$$C > 90 \text{ wenn } B \leq 90$$

Wäre aber $B > 90$, so ist C wieder unbestimmt, es sei denn, dass C nur auf eine Weise so genommen werden kann, dass $B + C > 180^\circ$.

$$\log \sin B = 9,8097796$$

$$\dots \sin c = 9,8767558$$

$$19,6865354$$

$$\dots \sin b = 9,9721358$$

$$\dots \sin C = 9,7143996$$

$$C = 31^\circ, 12', 13'', 5$$

93.

Aufgabe. Es sind alle drei Winkel gegeben, zum Beispiel $A = 40^\circ 56' 31'', 8$, $B = 139^\circ 48' 35'', 4$, $C = 31^\circ 12' 13'', 5$. Man sucht die Seiten.

Auflösung. Nach § 75 hat man:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(-1) \cos \frac{1}{2}S \cdot \cos(\frac{1}{2}S - A)}{\cos(\frac{1}{2}S - B) \cos(\frac{1}{2}S - C)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}b = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}S \cdot \cos(\frac{1}{2}S - B)}{\cos(\frac{1}{2}S - A) \cos(\frac{1}{2}S - C)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}c = \sqrt{\frac{-\cos \frac{1}{2}S \cdot \cos(\frac{1}{2}S - C)}{\cos(\frac{1}{2}S - A) \cos(\frac{1}{2}S - B)}}$$

$$A = 40^\circ 56' 31'', 8 \quad \frac{1}{2}S = 105^\circ 58' 40'', 4$$

$$B = 139^\circ 48' 35'', 4 \quad \frac{1}{2}S - A = 65^\circ 2' 8'', 6$$

$$C = 31^\circ 12' 13'', 5 \quad \frac{1}{2}S - B = -33^\circ 49' 55'', 0$$

$$S = 211^\circ 57' 20'', 7 \quad \frac{1}{2}S - C = 74^\circ 46' 26'', 9$$

$$\begin{array}{rcl} \log -\cos \frac{1}{2} S & = & 9,4397531 \\ \dots \cos(\frac{1}{2} S - A) & = & 9,6253671 \\ \hline & & 19,0651202 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \log \cos(\frac{1}{2} S - B) & = & 9,9194308 (\S 57) \\ \dots \cos(\frac{1}{2} S - C) & = & 9,4193355 \\ \hline & & 19,3387663 \end{array}$$

$$2) \quad 0,7263539 - 1$$

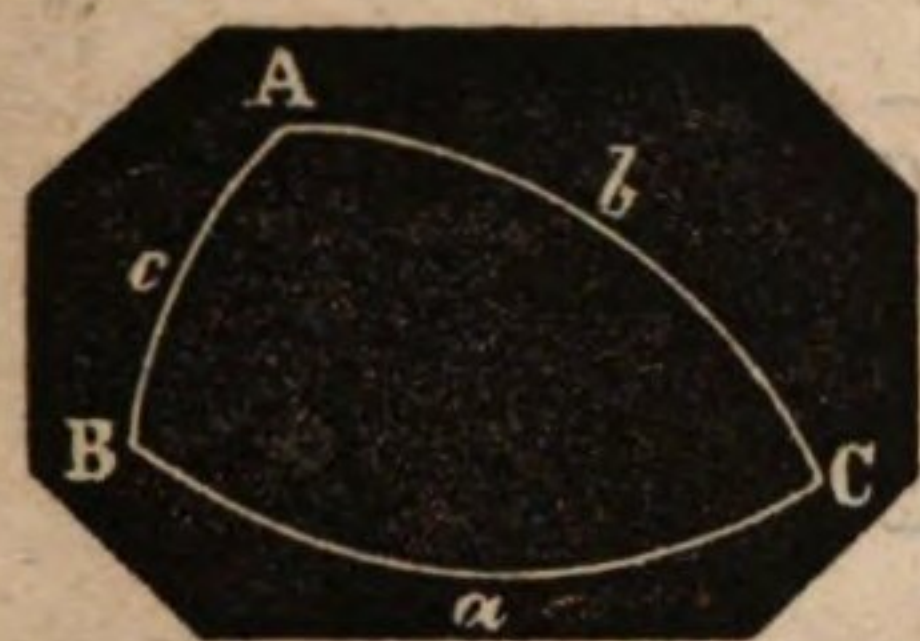
$$0,8631769 - 1$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} a = 9,8631769 - 10$$

$$\frac{1}{2} a = 36^{\circ} 7' 13''$$

Eben so findet man nach den beiden anderen Formeln $\frac{1}{2} b$ und $\frac{1}{2} c$ und daraus dann: $a = 72^{\circ} 14' 26''$; $b = 110^{\circ} 18' 20''$; $c = 48^{\circ} 50' 42''$.

94.



Aufgabe. Es sind zwei Winkel, A und B, und eine Gegenseite, a, gegeben. Man sucht die andere Gegenseite b.

Auflösung. Aus der Sinus-Regel $\frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin A}$ folgt:

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A}$$

Die Fälle, wo die durch ihren *sinus* gefundene Seite b bestimmt ist, ergeben sich wieder aus § 78, Anmerkung. Es ist nämlich:

1, Wenn $A + B = 180^{\circ}$, also auch $a + b = 180^{\circ}$:

$$b \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 90, \text{ wenn } a \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 90$$

2, Wenn $A + B < 180^{\circ}$, so ist:

$$b < 90, \text{ wenn } a \geq 90$$

Wäre $a < 90^{\circ}$, so kann b sowohl spitz als stumpf sein etc.

3, Wenn $A + B > 180^\circ$, so ist:

$$b > 90, \text{ wenn } a \leq 90$$

Wäre $a > 90$, so kann b sowohl spitz als stumpf sein etc.

95.

Aufgabe. Von einem sphärischen Dreieck sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel a, b, C gegeben, zum Beispiel $a = 72^\circ 14' 26''$, $b = 110^\circ 18' 20''$, $C = 31^\circ 12' 13'',5$. Man sucht die übrigen Stücke c, A, B .

Auflösung. In diesem Fall gebraucht man immer die Napier'schen Gleichungen und berechnet zuerst die Winkel A und B . Nach § 79 ist, wenn man, weil $b > a$, um negative Winkel zu vermeiden, a mit b und A mit B verwechselt:

$$\operatorname{tg} \frac{B+A}{2} = \cot \frac{1}{2} C \cdot \frac{\cos \frac{b-a}{2}}{\cos \frac{b+a}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B-A}{2} = \cot \frac{1}{2} C \cdot \frac{\sin \frac{b-a}{2}}{\sin \frac{b+a}{2}}$$

$$\log \cot \frac{1}{2} C = 10,5540220$$

$$\log \cot \frac{1}{2} C = 10,5540220$$

$$\therefore \cos \frac{b-a}{2} = 9,9755852$$

$$\therefore \sin \frac{b-a}{2} = 9,5133567$$

$$\hline 20,5296072$$

$$\hline 20,0673787$$

$$\therefore \cos \frac{b+a}{2} = 8,3466888 \text{ (n)}$$

$$\therefore \sin \frac{b+a}{2} = 9,9998928$$

$$\therefore \operatorname{tg} \frac{B+A}{2} = 12,1829184 \text{ (n)}$$

$$\therefore \operatorname{tg} \frac{B-A}{2} = 10,0674859$$

$$\frac{B+A}{2} = 90^\circ 22' 33'',6$$

$$A = 40^\circ 56' 31'',8$$

$$\frac{B-A}{2} = 49 \cdot 26 \cdot 1,8 \text{ mithin:}$$

$$B = 139 \cdot 48 \cdot 35,4$$

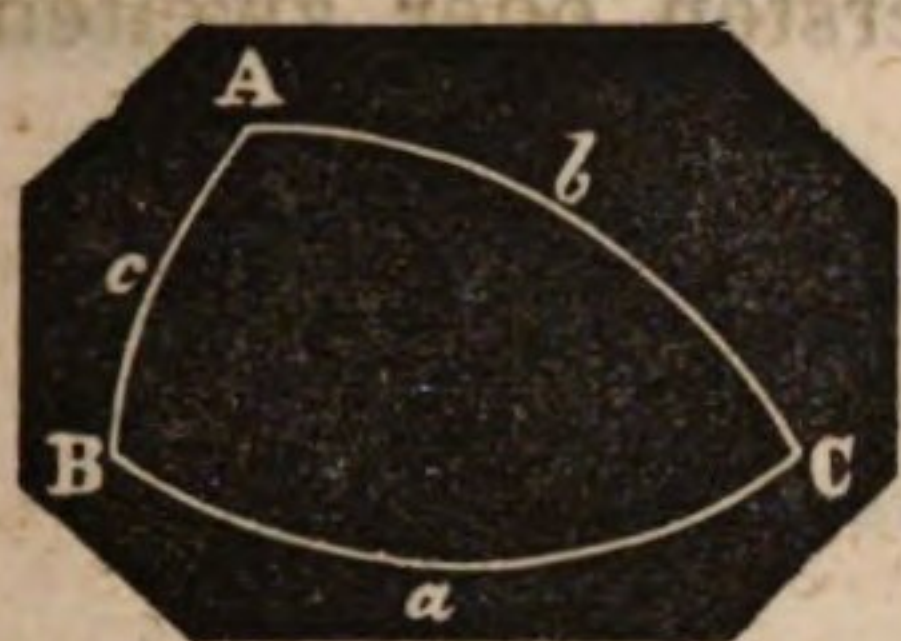
Die Seite c findet man jetzt nach der Sinus-Regel:

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}, \text{ woraus:}$$

$$\sin c = \frac{\sin C \cdot \sin a}{\sin A}$$

Ob die völlig bestimmte Seite c spitz oder stumpf ist, entscheidet man nach der Regel, dass $a+c$ mit $A+C$ und $b+c$ mit $B+C$ immer gleichartig ist. Hier ist also $c=48^{\circ}50'42''$. Weil nämlich $A+C < 180$, so muss $c < 90^{\circ}$ sein.

96.



Aufgabe. Von einem sphärischen Dreieck, ABC, ist eine Seite, c , und die beiden anliegenden Winkel A, B gegeben; man sucht die übrigen Stücke C, a , b .

Auflösung. In diesem Fall gebrauche man immer die Napier'schen Gleichungen und suche zuerst die beiden Seiten a , b . Man hat:

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}c \cdot \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{a-b}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2}c \cdot \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}}$$

Den völlig bestimmten Winkel C findet man nun nach der Sinus-Regel, nämlich:

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a} \sin A = \frac{\sin c}{\sin b} \sin B$$

Ob C spitz oder stumpf ist, entscheidet man nach der Regel, dass $A+C$ mit $a+c$ und $B+C$ mit $b+c$ gleichartig ist.

97.

Aufgabe. Es sind von vier auf einander folgenden Stücken, A, b , C, a , eines sphärischen Dreiecks zwei Seiten, a , b , und ein Gegenwinkel, A, gegeben, man sucht den andern Winkel C.

Auflösung. Statt den Winkel C mittelst der Formel:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

direct oder durch Einführung eines Hülfswinkels zu berechnen, ist es bequemer, zuerst nach der Sinus-Regel den zweiten Gegenwinkel B zu suchen, nämlich:

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} \cdot \sin A$$

alsdann findet man den Winkel C nach der ersten oder zweiten Napier'schen Formel:

$$\cot \frac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}$$

Wollte man auch noch die Seite c haben, so ist nach Formel 3 oder 4, § 79:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}$$

Anmerkung. Die Fälle, wo der zuerst zu findende Winkel B bestimmt oder zweideutig ist, ergeben sich daraus, dass $A+B$ mit $a+b$ gleichartig ist.

Will man aber zuerst C mittelst eines Hülfswinkels, φ , nach der Formel:

$$\cot A \cdot \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

berechnen, so verfähre man nach § 65.

Aus vorstehender Gleichung folgt:

$$\frac{\cot A}{\cos b} \cdot \sin C + \cos C = \cot a \cdot \operatorname{tg} b$$

setzt man nun: $\frac{\cot A}{\cos b} = \cot \varphi$, so hat man, weil $\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot \sin C + \cos C = \cot a \cdot \operatorname{tg} b$$

$$\sin C \cdot \cos \varphi + \cos C \sin \varphi = \cot a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \sin \varphi$$

$$\sin (C + \varphi) = \cot a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \sin \varphi$$

Diese Formel ist dann brauchbar, wenn man, wie es in der Praxis der Fall ist, im Voraus weiss, ob $\hat{C}$ spitz oder stumpf ist.

98.

Aufgabe. Von vier auf einander folgenden Stücken, A, b, C, a , eines sphärischen Dreiecks sind zwei Winkel, A, C , und eine Gegenseite, a , gegeben, man sucht die zwischen liegende Seite b .

Auflösung. Man hat aus:

$$\cot A \sin C + \cos C \cdot \cos b = \cot a \cdot \sin b$$

$$\cot a \cdot \sin b - \cos C \cdot \cos b = \cot A \cdot \sin C$$

$$\frac{\cot a}{\cos C} \cdot \sin b - \cos b = \cot A \cdot \operatorname{tg} C$$

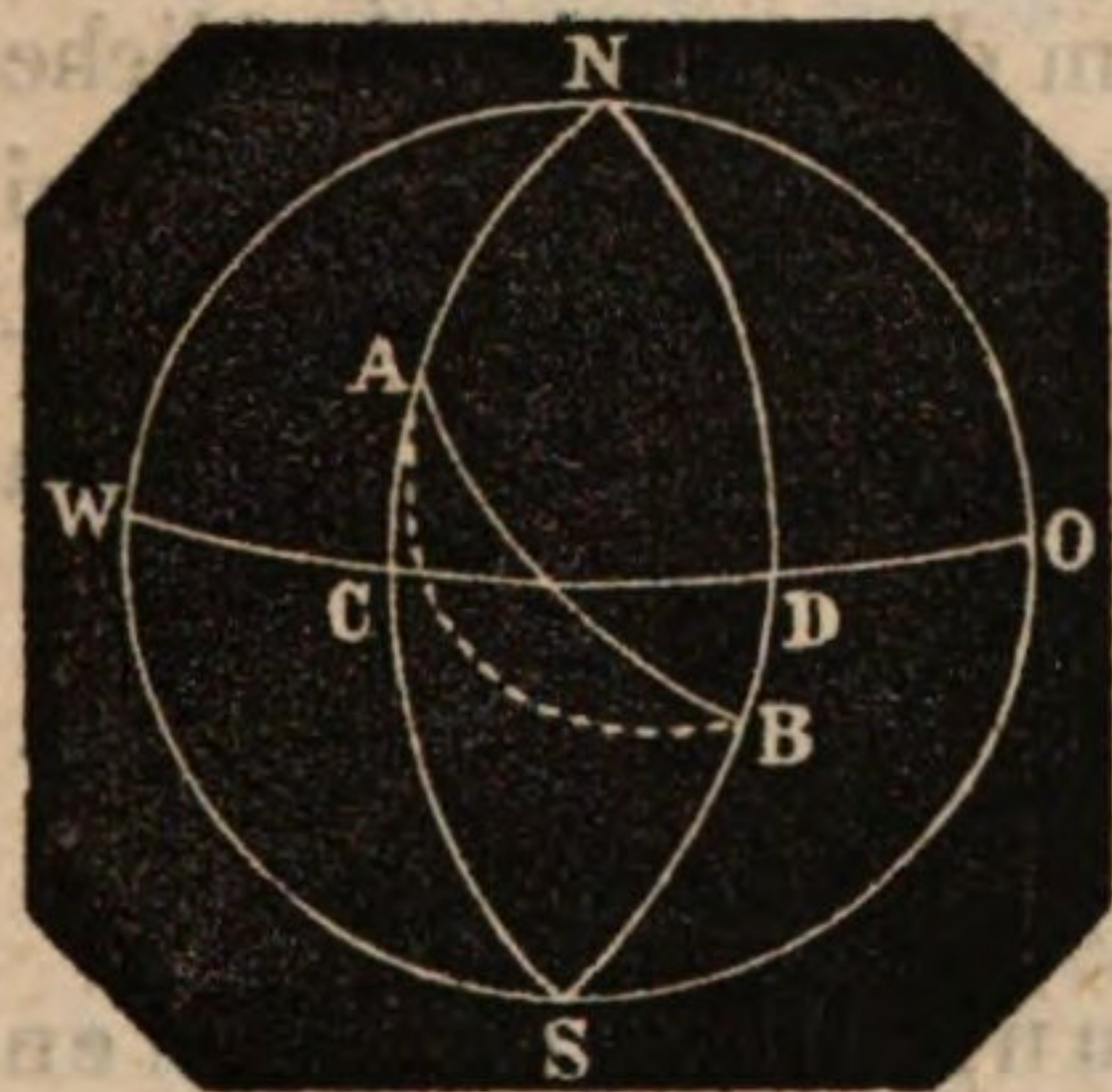
$$\cot \varphi \cdot \sin b - \cos b = \cot A \cdot \operatorname{tg} C$$

$$\cos \varphi \cdot \sin b - \cos b \cdot \sin \varphi = \cot A \cdot \operatorname{tg} C \cdot \sin \varphi$$

$$\sin(b - \varphi) = \cot A \cdot \operatorname{tg} C \cdot \sin \varphi$$

worin φ durch $\cot \varphi = \frac{\cot a}{\cos C}$ gegeben.

99.



Aufgabe. Es sind die geographischen Breiten und Längen zweier Oerter, A und B , auf der Erde gegeben, nämlich $AC = b$, $BD = -b'$; $WC = l'$, $WD = l$, man sucht die Entfernung der beiden Oerter A und B , d. h. den zwischen ihnen enthaltenen Bogen grössten Kreises $\widehat{AB} = x$.

Auflösung. Denkt man durch A und B die beiden Meridiane NAS, NBS gezogen, so entsteht das sphärische Dreieck ANB , in welchem der Winkel $N = l - l'$, die Seite $AN = 90 - b$ und die Seite $BN = 90 + b'$. Jetzt kann man nach § 95 verfahren.

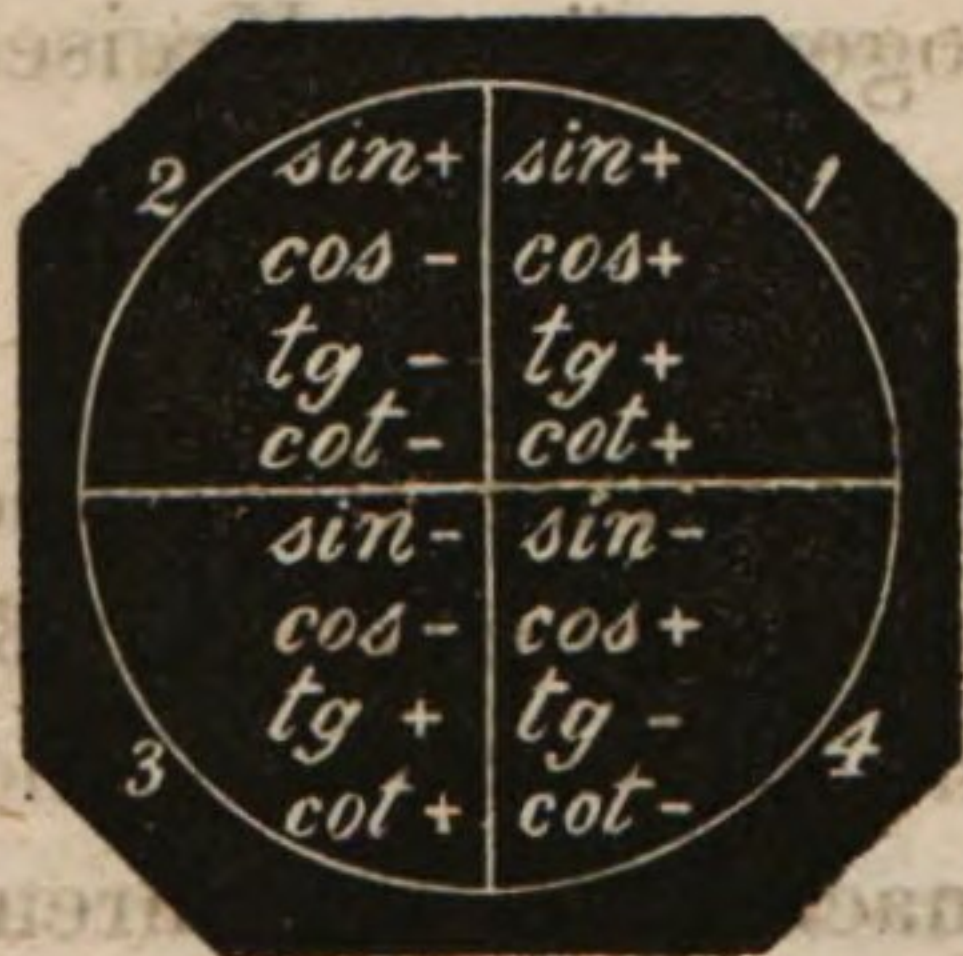
Will man aber die Seite $AB = x$ mittelst eines Hülfswinkels, φ , berechnen, so folgt aus:

$$\begin{aligned}\cos N &= \frac{\cos AB - \cos AN \cdot \cos BN}{\sin AN \cdot \sin BN} \\ \cos(l-l') &= \frac{\cos x - \cos(90-b) \cdot \cos(90+b')}{\sin(90-b) \cdot \sin(90+b')} \\ \cos(l-l') &= \frac{\cos x + \sin b \sin b'}{\cos b \cdot \cos b'} \\ \cos x &= \cos(l-l') \cdot \cos b \cdot \cos b' - \sin b \cdot \sin b' \\ \cos x &= \cos(l-l') \cdot \cos b' \left(\cos b - \frac{\sin b \sin b'}{\cos(l-l') \cos b'} \right) \\ \cos x &= \cos(l-l') \cdot \cos b' \left(\cos b - \sin b \cdot \frac{\operatorname{tg} b'}{\cos(l-l')} \right) \\ \cos x &= \cos(l-l') \cdot \cos b' \cdot (\cos b - \sin b \cdot \operatorname{tg} \varphi) \\ \cos x &= \cos(l-l') \cdot \cos b' \cdot \left(\frac{\cos b \cos \varphi - \sin b \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \\ \cos x &= \cos(l-l') \cdot \cos b' \cdot \cos(b+\varphi) \cdot \frac{1}{\cos \varphi} \\ \text{worin: } \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\operatorname{tg} b'}{\cos(l-l')}\end{aligned}$$

Die für x gefundenen Grade, Minuten etc. verwandelt man nun in Länge, indem man auf einen Grad grössten Kreises 15 geographische Meilen rechnet.

Anmerkung. Dass ein zwischen zwei Puncten, A, B, enthaltener Bogen grössten Kreises kleiner ist, als ein durch dieselben Puncte gelegter Bogen kleineren Kreises, erhellt leicht, wenn man den Bogen kleineren Kreises um die gemeinschaftliche Sehne gedreht und mit dem Bogen grössten Kreises in einerlei Ebene gebracht denkt, wo dann letzterer, weil mit einem grössern Radius beschrieben, vom erstern offenbar umgeben, folglich auch kleiner sein muss.

100.



Zusammenstellung der wichtigsten goniometrischen Formeln.

$$\begin{aligned}\sin 0 &= 0 & \sin 90 &= 1 \\ \cos 0 &= 1 & \cos 90 &= 0 \\ \operatorname{tg} 0 &= 0 & \operatorname{tg} 90 &= \infty \\ \cot 0 &= \infty & \cot 90 &= 0\end{aligned}$$

$$\sin 180 = 0$$

$$\sin 270 = -1$$

$$\sin 360 = 0$$

$$\cos 180 = -1$$

$$\cos 270 = 0$$

$$\cos 360 = 1$$

$$\sin 2k\pi = 0$$

$$\sin(2k+1)\pi = 0$$

$$\sin(-a) = -\sin a$$

$$\cos 2k\pi = 1$$

$$\cos(2k+1)\pi = -1$$

$$\cos(-a) = \cos(+a)$$

$$\sin(90 - a) = \cos a$$

$$\sin(180 - a) = \sin a$$

$$\cos(90 - a) = \sin a$$

$$\cos(180 - a) = -\cos a$$

$$\operatorname{tg}(90 - a) = \operatorname{cota}$$

$$\operatorname{tg}(180 - a) = -\operatorname{tg} a$$

$$\operatorname{cot}(90 - a) = \operatorname{tg} a$$

$$\operatorname{cot}(180 - a) = -\operatorname{cot} a$$

$$\sin(90 + a) = \cos a$$

$$\sin(180 + a) = -\sin a$$

$$\cos(90 + a) = -\sin a$$

$$\cos(180 + a) = -\cos a$$

$$\sin(270 + a) = -\cos a$$

$$\sin(360 + a) = \sin a$$

$$\cos(270 + a) = \sin a$$

$$\cos(360 + a) = \cos a$$

$$\sin(45 + a) = \cos(45 - a)$$

$$\sin 30 = \frac{1}{2} = \cos 60$$

$$\cos(45 + a) = \sin(45 - a)$$

$$\sin 60 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \cos 30$$

$$\sin 45 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos 45$$

$$\operatorname{tg} 45 = 1 = \operatorname{cot} 45$$

$$* 1. \sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$$

$$* 2. \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$$

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$$

$$* 3. \frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{cota}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{\operatorname{cota}}$$

$$* 4. \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{cota} = 1$$

$$\operatorname{cota} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

$$5. \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} \left(= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{cot}^2 a}} \right)$$

$$6. \cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 a}} \left(= \frac{\operatorname{cot} a}{\sqrt{1 + \operatorname{cot}^2 a}} \right)$$

$$7. 1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$8. 1 + \operatorname{cot}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$$

$$* 9. \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$* 10. \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$* 11. \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$* 12. \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$* 13. \quad tg(a+b) = \frac{tg a + tg b}{1 - tg a \cdot tg b}$$

$$* 14. \quad tg(a-b) = \frac{tg a - tg b}{1 + tg a \cdot tg b}$$

$$15. \quad cot(a \pm b) = \frac{cot a \cdot cot b \pm 1}{cot b \pm cot a}$$

$$16. \quad sin 2a = 2 \cdot sin a \cdot cos a$$

$$* \quad sin a = 2 \cdot sin \frac{1}{2}a \cdot cos \frac{1}{2}a$$

$$17. \quad cos 2a = cos^2 a - sin^2 a = 1 - 2sin^2 a = 2cos^2 a - 1$$

$$cos a = cos^2 \frac{1}{2}a - sin^2 \frac{1}{2}a$$

$$18. \quad sin 3a = 3sin a - 4sin^3 a$$

$$19. \quad tg 2a = \frac{2 tg a}{1 - tg^2 a}$$

$$20. \quad tg a = \frac{2 tg \frac{1}{2}a}{1 - tg^2 \frac{1}{2}a}$$

$$* 21. \quad 1 - cos a = 2sin^2 \frac{1}{2}a$$

$$* 22. \quad 1 + cos a = 2cos^2 \frac{1}{2}a$$

$$23. \quad tg \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - cos a}{1 + cos a}} = \frac{sin a}{1 + cos a} = \frac{1 - cos a}{sin a}$$

$$24. \quad tg(45 - b) = \frac{1 - tg b}{1 + tg b}$$

$$25. \quad tg(45 + b) = \frac{1 + tg b}{1 - tg b}$$

$$26. \quad sin a + cos a = sin(45 + a) \cdot \sqrt{2} \dots (\S 51)$$

$$27. \quad cos a - sin a = sin(45 - a) \cdot \sqrt{2}$$

$$28. \quad sin(45 + a) = cos(45 - a)$$

$$29. \quad cos(45 + a) = sin(45 - a)$$

$$30. \quad sin p + sin q = 2sin \frac{p+q}{2} \cdot cos \frac{p-q}{2}$$

$$31. \quad sin p - sin q = 2cos \frac{p+q}{2} \cdot sin \frac{p-q}{2}$$

$$32. \quad cos p + cos q = 2cos \frac{p+q}{2} \cdot cos \frac{p-q}{2}$$

$$33. \quad cos q - cos p = 2sin \frac{p+q}{2} \cdot sin \frac{p-q}{2}$$

$$34. \quad \frac{sin p - sin q}{sin p + sin q} = \frac{tg \frac{p-q}{2}}{tg \frac{p+q}{2}}$$

35. $1 + \sin q = 2 \cdot \sin^2 (45 + \frac{1}{2}q) = 2 \cos^2 (45 - \frac{1}{2}q)$
 36. $1 - \sin q = 2 \cos^2 (45 + \frac{1}{2}q) = 2 \cdot \sin^2 (45 - \frac{1}{2}q)$
 37. $\frac{1 - \cos a}{\cos a} = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}a$
 38. $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \sin (a + b) + \frac{1}{2} \sin (a - b) \dots (\S 52)$
 39. $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} \cos (a - b) - \frac{1}{2} \cos (a + b)$
 40. $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} \cos (a + b) + \frac{1}{2} \cos (a - b)$
 41. $\operatorname{arc} \sin x \pm \operatorname{arc} \sin y = \operatorname{arc} \sin (x \sqrt{1 - y^2} \pm y \sqrt{1 - x^2})$
 42. $\operatorname{arc} \cos x \pm \operatorname{arc} \cos y = \operatorname{arc} \cos (xy \mp \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)})$
 43. $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \pm \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$
 44. $\operatorname{arc} \cot x \pm \operatorname{arc} \cot y = \operatorname{arc} \cot \frac{xy \mp 1}{y \pm x}$
-

Druck der Hofbuchdruckerei (H. A. Pierer) in Altenburg.



Von demselben Verfasser ist ferner erschienen:

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.

Zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet. Sechste unveränderte Auflage. $1\frac{1}{3}$ R_g

Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie.

Ebene und körperliche Geometrie; zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Mit 192 Figuren im Text. Sechste unveränderte Auflage. 1863. 1 R_g

Ausführliches Lehrbuch der höhern Geometrie.

Zum Selbstunterricht, mit Rücksicht auf das Nothwendigste und Wichtigste. Mit 122 Figuren im Text. Fünfte unveränderte Auflage. 1862. $1\frac{1}{3}$ R_g

Ausführliches Lehrbuch der Analysis.

Zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. Zweite verbesserte Auflage. 1860. 1 R_g 6 S_{gr}

Einleitung in die Infinitesimalrechnung. (Differential- und Integralrechnung.) Zum Selbstunterricht. Mit Rücksicht auf das Nothwendigste und Wichtigste. Mit 53 Figuren im Text. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. 1862. $2\frac{2}{3}$ R_g

Einleitung in die Mechanik.

Zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens.

Erster Theil: Statik fester Körper, Hydrostatik und Aërostatik. 1858. 1 R_g 6 S_{gr}

Zweiter Theil: Dynamik fester Körper, Hydrodynamik und Aërodynamik. 1859. 1 R_g 2 S_{gr}

Von demselben Verfassers ist ferner erschienen:

Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra

Zum Selbstunterricht und zur Vorbereitung auf die Zwecke des hiesigen Lehrens eingerichtet. Dritte, verbesserte Ausgabe. 1855. 1 Thl. 1 1/2 Rthlr.

Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Zum Selbstunterricht und zur Vorbereitung auf die Zwecke des hiesigen Lehrens eingerichtet. Dritte, verbesserte Ausgabe. 1855. 1 Thl. 1 1/2 Rthlr.

Ausführliches Lehrbuch der höheren Geometrie

Zum Selbstunterricht und zur Vorbereitung auf die Zwecke des hiesigen Lehrens eingerichtet. Dritte, verbesserte Ausgabe. 1855. 1 Thl. 1 1/2 Rthlr.

Ausführliches Lehrbuch der Analysis

Zum Selbstunterricht und zur Vorbereitung auf die Zwecke des hiesigen Lehrens eingerichtet. Dritte, verbesserte Ausgabe. 1855. 1 Thl. 1 1/2 Rthlr.

Einleitung in die Differentialrechnung (Differential- und Integralrechnung)

Zum Selbstunterricht und zur Vorbereitung auf die Zwecke des hiesigen Lehrens eingerichtet. Dritte, verbesserte Ausgabe. 1855. 1 Thl. 1 1/2 Rthlr.

Einleitung in die Mechanik

Zum Selbstunterricht und zur Vorbereitung auf die Zwecke des hiesigen Lehrens eingerichtet. Dritte, verbesserte Ausgabe. 1855. 1 Thl. 1 1/2 Rthlr.

Erster Theil: Statik fester Körper, Hydrostatik und Aërostatik. 1855. 1 1/2 Rthlr.

Zweiter Theil: Dynamik fester Körper, Hydrodynamik und Aërodynamik. 1855. 1 1/2 Rthlr.

Lübsen, Heinrich B.,

Ausführliches Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie zum
Selbstunterricht, mit Rücksicht auf die Zwecke des practischen Lebens

Leipzig 1867

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 98(6)

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346089-3